

**Ein auf der Hilfsvariablentheorie basierendes neues
Parameterschätzverfahren zur Identifizierung
dynamischer Systeme.**

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktor - Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Dipl.-Ing. Dieter Nicolai
aus Oberlengsfeld

Bochum 1976

**Ein auf der Hilfsvariablentheorie basierendes neues
Parameterschätzverfahren zur Identifizierung
dynamischer Systeme.**

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktor - Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Dipl.-Ing. Dieter Nicolai
aus Oberlengsfeld

Bochum 1976



Dissertation eingereicht am: 26.4.1976

Tag der mündlichen Prüfung: 10.11.1976

Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. W. Weber

Die vorliegende Arbeit¹⁾ entstand während meiner Tätigkeit im Institut für Automationstheorie und Rechentechnik der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft AEG-Telefunken. Für die Unterstützung, die mir bei der Anfertigung dieser Arbeit gewährt wurde, bin ich der Firma, insbesondere Herrn Direktor Dr.rer.nat. K. Scheidhauer, Herrn Dr.-Ing. W. Seifert und Herrn Dr.-Ing. F. Dörrscheidt zu Dank verpflichtet.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. H. Unbehauen für die zahlreichen Anregungen und Diskussionen sowie für das große Interesse, das er der Arbeit entgegengebracht hat. Herrn Professor Dr.-Ing. W. Weber bin ich für die Uebernahme des Korreferates sehr verbunden.

1)

Die dieser Dissertation zugrundeliegenden Arbeiten wurden teilweise mit Mitteln des BMFT gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt liegt jedoch allein beim Autor.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0028

Inhaltsverzeichnis
=====

	Seite
1. <u>Einführung</u>	3
1.1 Problemstellung der Systemidentifizierung	3
1.2 Identifizierung mittels Prozeßrechner	3
1.3 Zweck der Systemidentifizierung	5
1.4 Identifizierungsprinzip	7
1.4.1 Systemmodell	10
1.4.2 Parameterschätzung	19
1.5 Ziel und Abgrenzung dieser Arbeit	21
2. <u>Lösungen des Parameter-Schätzproblems</u>	26
2.1 Eigenschaften von Parameterschätzungen	26
2.2 Methode der kleinsten Fehlerquadrate	28
2.2.1 Explizites Schätzverfahren	29
2.2.2 Rekursives Schätzverfahren	40
2.2.3 Eigenschaften von expliziter und rekursiver Schätzung	46
2.2.4 Pseudorekursives Schätzverfahren	52
2.3 Hilfsvariablenverfahren	65
2.4 Numerische Eigenschaften	72
2.4.1 Kondition der Least-squares-Verfahren	83
2.4.2 Eigenschaften der Hilfsvariablenverfahren	87
2.4.3 Numerischer Aufwand	89
2.4.4 Einfluß der endlichen Wortlänge	92
3. <u>Ableitung des neuen numerischen Verfahrens</u>	106
3.1 Konditionsverbesserung	114
3.1.1 Transformation der Schätzgleichung	119
3.2 Hilfsmodelle	139
3.2.1 Verzögerungsmodell	141
3.2.2 Diskretes Kalman-Filter	142
3.2.3 Impulsantwortmodell	145
3.2.4 Zeitinvariantes Modell	148
3.2.5 Vergleich der Hilfsmodelle	149

	Seite
3.3	Startwerte 151
3.4	Bewertung des neuen Verfahrens 153
4.	<u>Grundstruktur und Erweiterungen</u> 161
4.1	Modellordnung 161
4.2	Konditionstest 164
4.3	Identifizierung im geschlossenen Kreis 167
4.4	Identifizierung von Mehrgrößensystemen 170
5.	<u>Simulationsergebnisse</u> 179
5.1	Simulationsprozesse 180
5.2	Testbedingungen 185
5.3	Bestimmung der Modellordnung 189
5.4	Konditionstest 189
5.5	Ermittlung der Prozeßkennwerte 191
5.6	Kennwerte im geschlossenen Kreis 201
5.7	Parameterbestimmung eines Mehrgrößensystems 205
5.8	Identifizierung einer Dampferzeuger-Regelstrecke 210
6.	<u>Zusammenfassung</u> 216
L.	<u>Literaturverzeichnis</u> L.1
A.	<u>Anhang</u> A.1
A.1	Beschreibung des Korrelationsverfahrens (KOR) A.1
A.2	Beweis der Sätze 3.1 - 3.5 A.4
A.3	Bekannte Verfahren zur Konditionsverbesserung A.7
A.4	FORTTRAN-IV-Programme A.15
A.5	Zeitverläufe der geschätzten Prozeßparameter A.21
A.6	Liste der wichtigsten Formelzeichen A.55

1. Einführung

1.1 Problemstellung der Systemidentifizierung

In modernen systemtechnischen Konzepten zur Analyse und/oder Synthese industrieller Prozesse gewinnen Verfahren zur Systemidentifizierung, d.h. Verfahren zur Systemanalyse aufgrund experimenteller Untersuchungen, immer mehr an Bedeutung. Die Ursache zum sinnvollen oder notwendigen Einsatz solcher Identifizierungsverfahren liegt in der Eigenschaft, daß sich industrielle Strecken, beispielsweise aus der Chemie oder der Metallurgie, nur sehr schwer analytisch erfassen lassen. Vielfach ist jedoch

- der Prozeß zu kompliziert oder auch zu komplex für eine sinnvolle mathematische Beschreibung des dynamischen und/oder statischen Verhaltens;
- eine geschlossene Theorie für den Gesamtprozeß oder für Teilprozesse nicht oder nur sehr vage bekannt. Weiterhin fehlen Kenntnisse über eine Zeitabhängigkeit von Systemparametern;
- eine Beeinflussung durch starke, nichtmeßbare Störungen vorhanden, die einer analytischen Beschreibung nicht zugänglich sind.

In allen diesen Fällen wird eine hinreichende theoretische Systemanalyse in Form von Bilanzgleichungen nur sehr schwer, wenn überhaupt durchführbar sein.

1.2 Identifizierung mittels Prozeßrechner

Prinzipiell können Identifizierungsverfahren in sehr einfacher Form angegeben werden, wenn die diskrete Arbeitsweise eines Digi-

talrechners zugrundegelegt wird. Bei einer Vielzahl technischer Prozesse werden bereits Prozeßrechner im Echtzeitbetrieb eingesetzt und die Anzahl der installierten Rechner wächst ständig weiter. Ihre Hauptaufgaben liegen wohl noch in der Datenerfassung, Datensicherung und Datenreduktion, also in einer Datenanalyse, weiterhin in der Bilanzierung und Prozeßüberwachung. Aus ökonomischen Gründen erscheint es aber richtig, auch die experimentelle Systemanalyse und gegebenenfalls die anschließende Regelung dem Prozeßrechner selbst oder kleineren, als Steuerungsrechner konzipierten Kleinst-Prozeßrechner bzw. Micro-Prozessoren zu übertragen. Daraus ergeben sich mehrere korrespondierende Forderungen, die ein Identifizierungsverfahren erfüllen muß:

1. Das Verfahren muß universell einsetzbar sein, d.h.

es muß zur Erkennung von Systemen sehr unterschiedlicher Struktur und Parameter geeignet sein und der häufig vorliegenden Tatsache Rechnung tragen, daß nur wenige oder gar keine Vorkenntnisse über den Prozeß und die auftretenden Störungen vorhanden sind. Weiterhin müssen natürliche, aus dem kontinuierlichen Prozeß stammende Testsignale verwendbar sein, falls der normale Prozeßablauf nicht gestört werden darf.

2. Das statistische Schätzverfahren soll möglichst genaue, d.h. zunächst erwartungstreue Schätzergebnisse liefern.

Darüber hinaus muß gute Stabilität und schnelle Konvergenz des Verfahrens gesichert sein.

3. Das Identifizierungsverfahren muß auf die speziellen Eigenschaften eines Prozeßrechners zugeschnitten sein, d.h. es

muß die sequentielle Arbeitsweise in "Echtzeit" berücksichtigen und daher als "on-line"-Verfahren verwendbar sein, das eine laufende Schätzung ermöglicht. Das Verfahren sollte aber auch off-line einsetzbar sein. Weitere gravierende Eigenschaften liegen in den häufig engen Begrenzungen von Speicherkapazität, Zykluszeit und Wortlänge des Rechners, wobei die Zyklus- oder Abtastzeit meist problem-orientiert ist und in gewissen Grenzen festliegt.

4. Das Schätzergebnis muß leicht weiterverwendbar sein, d.h. beispielsweise zum Entwurf oder zur Nachführung der Regelung sollten die Systemparameter direkt zugänglich sein.

1.3 Zweck der Identifizierung

Die Hauptgründe, die zum Einsatz von Identifizierungsverfahren führen, lassen sich in mehreren Richtungen sehen:

1. Die Kenntnisse über den Prozeß können verbessert werden, was für den Entwurf einer neuen Anlage von erheblicher Bedeutung ist.
2. Ein theoretisch gewonnenes Modell läßt sich leicht überprüfen und der "Abstand" zwischen System und mathematischem Modell gegebenenfalls verringern.
3. Das Regelungsverhalten kann verbessert werden, und zwar zunächst unabhängig davon, ob DDC eingesetzt oder analog geregelt

wird. Dies gilt für klassische Regelungen, es können aber auch leicht adaptive Regelungen mit der Erfassung zeitvarianter Parameter und Drifterscheinungen realisiert werden. Darüber hinaus wird der Entwurf optimaler bzw. suboptimaler Regelungen hinsichtlich Struktur und Parameter ermöglicht.

Die Verbesserung "klassischer" Regelkonzepte kann durch die Regelung berechneter, nichtmeßbarer Systemgrößen erreicht werden und weiterhin durch die Einführung von Hilfssteuer- und Hilfsregelgrößen. Damit ergeben sich Verbesserungen hinsichtlich

a) der Stabilität, d.h. der Sicherheit und Lebensdauer der Anlage;

b) der Anzahl und stationären Genauigkeit der Regelungen, des Führungs- und Störverhaltens.

4. Vorhersageprobleme (Prädiktionen) können durch die Berechnung nicht zugänglicher Größen gelöst werden.

5. Die Führung schwieriger und komplexer Prozesse wird ermöglicht, wobei die Sollwerte für die einzelnen. z.T. unterlagerten Teilsysteme durch Minimieren einer Kostenfunktion bzw. Maximieren einer Gewinn- oder Qualitätsfunktion berechnet werden.

Diese Auflistung von Anwendungen zeigt, daß der Einsatz von Identifizierungsverfahren zur Lösung und Unterstützung von Regelungsaufgaben von größter praktischer Bedeutung ist, so daß die For-

derung nach leichter Weiterverwendbarkeit des Identifikations-
ergebnisses gerechtfertigt erscheint. Man erreicht dies durch
Verwendung eines parametrischen Verfahrens, das die Bestimmung
der Kennwerte eines Systems aus den gemessenen Ein- und Ausgangs-
größen des Prozesses in direkter Weise ermöglicht, wobei aller-
dings eine bestimmte Systemstruktur festgelegt sein muß. Ein sol-
ches Ergebnis in direkter parametrischer Form gewinnt man mit
Hilfe eines sogenannten Modellverfahrens, das sich durch den Ver-
gleich der Ausgangssignale des zu identifizierenden Prozesses
und eines parallel angeordneten, einstellbaren mathematischen
Modells auszeichnet.

1.4 Identifizierungsprinzip

Das Prinzip des Modellverfahrens, das ein Systemmodell direkt in
parametrischer Form liefert, kann allgemein gemäß Bild 1.4.1 be-
schrieben werden.

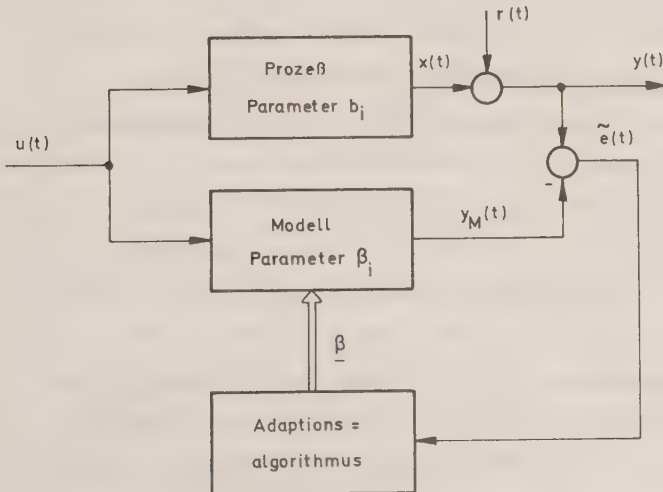


Bild 1.4.1: Identifizierungsprinzip bei Modellverfahren

In diesem allgemeinen Eingrößenfall ist ein Parallelmodell angenommen, das durch die Prozeßeingangsgröße $u(t)$ angeregt wird. Ein Vergleich zwischen Prozeßausgangsgröße $y(t)$ und Modellausgang $y_M(t)$ führt auf das Fehlersignal $\tilde{e}(t)$, das nur im störungsfreien Fall stationär auf Null gebracht werden kann. Betrachten wir den realen Fall, dann wird sich bei richtig gewählter Systemstruktur wegen der vorhandenen Störungen $r(t)$ selbst im abgeglichenen Zustand ein von Null verschiedener Fehler $\tilde{e}(t)$ einstellen. Schätzwerte $\hat{b}_i$ der Prozeßparameter b_i erhält man dann aus der Forderung, daß dieser Fehler $\tilde{e}(t)$, den man zweckmäßigerweise bewertet, minimal werden soll. Als Fehlerfunktion, die diese Fehlergewichtung beschreibt, eignen sich konvexe Funktionen mit ausgeprägtem Minimum, im einfachsten Falle eine quadratische Fehlerfunktion, die auch im weiteren vorausgesetzt werden soll und direkt auf die Parameterschätzung nach den kleinsten Fehlerquadraten (least-squares) führt.

Das allgemeine Identifizierungsprinzip, das schematisch im Bild 1.4.2 skizziert ist und den weiteren Ausführungen zugrunde liegt, läßt sich dann aus 3 Teilaufgaben bestehend ansehen: Festlegung der Modellstruktur, Bestimmung der Modellparameter mit Hilfe eines geeigneten statistischen Schätzverfahrens und Verifizierung des gefundenen Modells, empirisch oder anhand eines statistischen Testverfahrens. Bevor dieser formale Identifizierungsablauf durchgeführt werden kann, müssen in einer Vorbereitungsphase die experimentellen Bedingungen am Prozeß festgelegt werden, die das Identifizierungsergebnis in erheblichem Maße mitbeeinflussen. Diese Bedingungen müssen sich einerseits an den vorhandenen Vorkenntnissen über den Prozeß und die auftretenden Störungen orientieren, andererseits an den ökonomischen und technischen Voraussetzungen, die

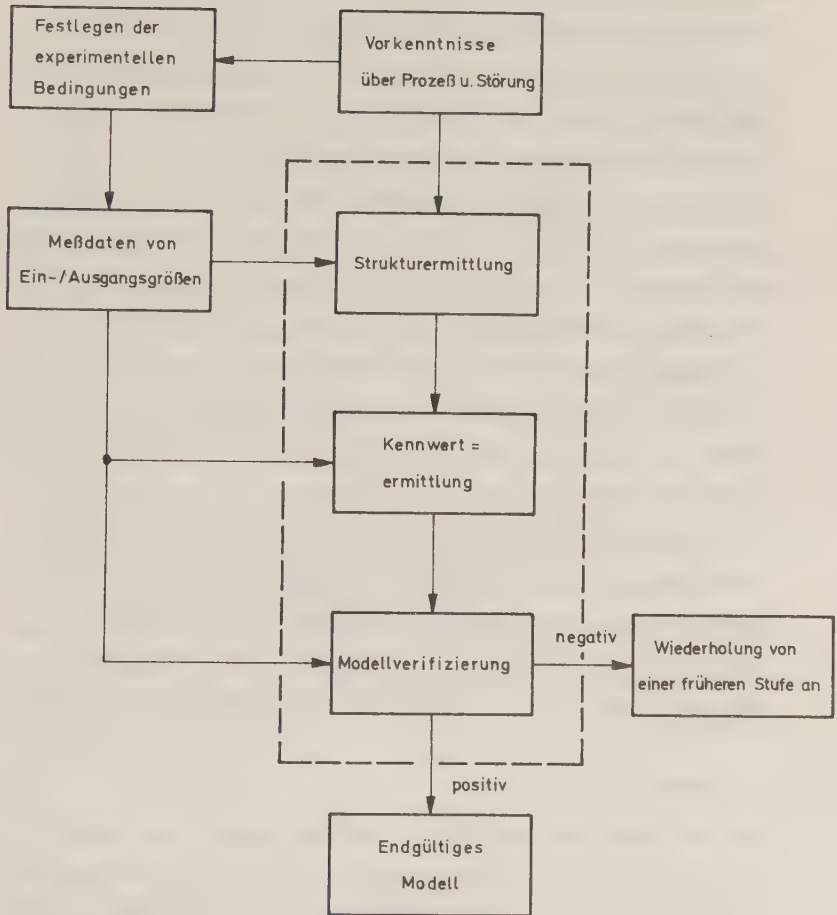


Bild 1.4.2: Schema des Identifizierungsvorganges

ein Experimentieren am Prozeß möglicherweise stark einschränken. Insbesondere ist zu prüfen, ob künstliche Testsignale verwandt werden können oder ob sich die Identifizierung auf natürliche,

aus dem laufenden Prozeß stammende, Meßdaten beschränken muß, ob die Systemanalyse am offenen Regelkreis durchgeführt werden kann oder nur im geschlossenen Kreis möglich ist. Es sind hier grundlegende Fragen der Identifizierbarkeit zu klären, wobei die Prozeßeingangssignale so beschaffen sein müssen, daß sie eine "hinreichende" Anregung der Prozeßdynamik gewährleisten, andererseits aber dem i. a. nichtlinearen Charakter der Prozeßstrecke Rechnung tragen, d. h. es sind Begrenzungen hinsichtlich der Art und der Höhe der Eingangssignale zu beachten. Um die experimentellen Bedingungen möglichst optimal zu gestalten, wird ein sorgfältiger Entwurf und eine Anpassung von geeigneten oder optimalen Testsignalen, der Abtastintervalle und gegebenenfalls einer Daten-Vorfilterung nötig sein, um Meßwerte zu erhalten, die ein hinsichtlich einer bestimmten Gütefunktion optimales Identifizierungsergebnis ermöglichen /1/, /2/, /3/. Das Festlegen der experimentellen Bedingungen muß sich demnach am jeweiligen Prozeß orientieren, während der "innere" Identifizierungsablauf von festen Voraussetzungen hinsichtlich Modellstruktur und Schätzverfahren ausgeht.

1.4.1 Systemmodell.

Die Festlegung der Modellstruktur erfolgt aufgrund des Identifikationszieles und der Vorkenntnisse über den Prozeß, die gegebenenfalls noch beschafft werden müssen. Wir wollen von einem linearen Systemmodell ausgehen und wegen der diskontinuierlichen Arbeitsweise eines Digitalrechners ein Modell in zeitdiskreter Form annehmen. Zwar kann ein zeitdiskretes Modell den kontinuierlichen Prozeß bei endlichem Aufwand nur näherungsweise beschreiben und die Modellparameter haben keine physikalische Bedeutung mehr, aber die Modellbestimmung wird in dieser diskreten Form sehr vereinfacht,

was für einen on-line-Betrieb von größter Bedeutung ist. Andererseits versucht man in der Praxis, ein Modell mit möglichst niedriger Ordnung anzunehmen, das den i.a. nichtlinearen, hochgradigen Prozeß ohnehin nur näherungsweise beschreiben kann. Man beschränkt sich demnach auf das wesentliche Systemverhalten und versucht, die nichtlinearen Effekte durch Adaption des zeitvarianten Systemmodells auszugleichen. Fehler, die durch die Diskretisierung des kontinuierlichen Prozesses entstehen, können i.a. vernachlässigt werden, da sie meist gering sind und darüber hinaus durch den Adaptionsvorgang miterfaßt, d.h. auf ein Minimum gebracht werden. Dieses mathematische Modell zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens kann prinzipiell als diskrete Übertragungsfunktion oder in Zustandsvariablenform vorliegen. Als Grundstruktur wollen wir die diskrete Übertragungsfunktion wählen, die im Zeitbereich bekanntlich eine Differenzengleichung darstellt und einen unmittelbaren Zusammenhang der meßbaren Ein- und Ausgangsgrößen angibt. Diese Ein-, Ausgangsbeschreibung kann durch eine geeignete Transformation direkt aus der Zustandsvariablenform abgeleitet werden.

Wenn wir uns zunächst auf den Eingrößenfall beschränken, dann sei gemäß Bild 1.4.1 und Bild 1.4.4 $u(k)$ das zum Zeitpunkt $t = kT_0$ abgetastete Eingangssignal $u(t)$, $y(k)$ das entsprechende Prozeß-Ausgangssignal, gebildet aus dem störungsfreien Ausgangssignal $x(k)$ und überlagertem Rauschen $r(k)$, schließlich sei $y_M(k)$ das zugeordnete diskrete Modell-Ausgangssignal. Bei vorausgesetzter äquidistanter Abtastung mit der konstanten Abtastperiode T_0 läßt

sich der Abtastvorgang allgemein nach Bild 1.4.3 beschreiben /4/,
/5/, wobei folgende Abkürzung zu den Abtastzeitpunkten

$$t = kT_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{gelte:}$$

$$f(k) = f(kT_0) = f_k. \quad (1.4.1)$$

In der oberen Darstellung wird aus dem kontinuierlichen Signal $f(t)$ durch Abtastung die Wertefolge $f(k)$ und durch anschließende Speicherung über die Periode T_0 die Treppenkurve $\bar{f}(t)$ erzeugt. In der unteren, gleichwertigen Darstellung von Bild 1.4.3 wird $\bar{f}(t)$ über

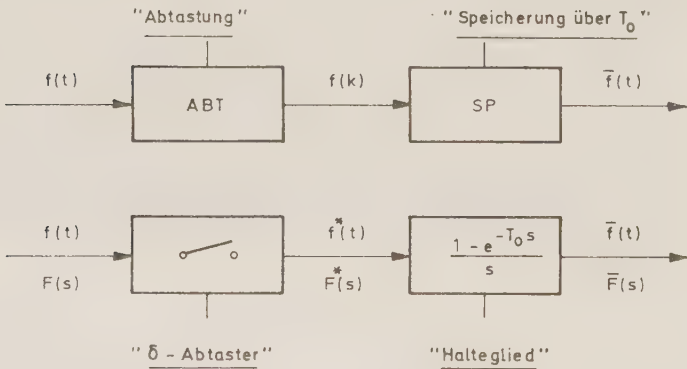


Bild 1.4.3: Tastvorgang als Abtast-Halteglied

ein Halteglied 0-ter Ordnung aus der Impulsfolge $f^*(t)$ gewonnen, wobei $f^*(t)$ aus der mathematisch definierten δ -Abtastung des Eingangssignals $f(t)$ abgeleitet wird:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \delta(t - kT_0). \quad (1.4.2)$$

Für beide Darstellungen gilt folgende z-Transformierte:

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = \mathcal{Z}\{f^*(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad (1.4.3)$$

mit der Abkürzung $z = e^{T_0 s}$. (1.4.4)

Das Symbol z läßt sich als Operator zur Verschiebung der Wertefolge $\{f(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ auffassen, denn nach dem Verschiebungssatz der z-Transformation gilt:

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1} \mathcal{Z}\{f(k)\} = z^{-1} F(z) \quad (1.4.5)$$

Mit dieser Definition des Abtastvorganges wird als Modellgleichung die folgende z-transformierte Form eingeführt (Bild 1.4.4):

$$Y_M(z) = G_M(z) U(z) \quad (1.4.6)$$

Die diskrete Übertragungsfunktion $G_M(z)$ wird dabei als linear und zeitinvariant angenommen:

$$G_M(z) = \frac{Y_M(z)}{U(z)} = \frac{B_M(z^{-1})}{A_M(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_{0M} + b_{1M}z^{-1} + \dots + b_{nM}z^{-n}}{a_{0M} + a_{1M}z^{-1} + \dots + a_{nM}z^{-n}} z^{-d} \quad (1.4.7)$$

In dieser allgemeinen Form deutet ein Koeffizient $b_{0M} \neq 0$ darauf hin, daß das System sprunghafte Variable enthält, oder aber, daß die Abtastzeit zu groß gewählt wurde. Da sprunghafte Variable in technischen Systemen recht selten auftreten, wollen wir im folgenden den Koeffizienten $b_{0M} = 0$ ansetzen. Dies stellt keine Beschränkung der Allgemeingültigkeit dar, da sich dieser Koeffizient sehr leicht in die entsprechenden Vektor- und Matrizenausdrücke einbauen läßt. Ebenfalls aus Vereinfachungsgründen wollen

wir auch die Totzeit von d Abtastschritten vernachlässigen.

Bei $d \neq 0$ und der Kenntnis dieser Totzeit sind die Eingangssignalfolgen lediglich um d Abtastintervalle zu verschieben. Schließlich wird durch Normierung der Koeffizient a_{0M} gleich 1 gewählt, um die Zahl unbekannter Parameter möglichst klein zu halten. Damit wird aus Gl. (1.4.7):

$$G_M(z) = \frac{Y_M(z)}{U(z)} = \frac{B_M(z^{-1})}{A_M(z^{-1})} = \frac{b_{1M}^* z^{-1} + \dots + b_{nM}^* z^{-n}}{1 + a_{1M}^* z^{-1} + \dots + a_{nM}^* z^{-n}} \quad (1.4.8)$$

mit den Abkürzungen

$$A_M(z^{-1}) = 1 + a_{1M}^* z^{-1} + \dots + a_{nM}^* z^{-n} \quad (1.4.9)$$

$$B_M(z^{-1}) = b_{1M}^* z^{-1} + \dots + b_{nM}^* z^{-n} ,$$

wobei n die Modellordnung angibt und der Index M auf die Modellgleichung hinweist. Aus Gl. (1.4.8) folgt auch

$$A_M(z^{-1})Y_M(z) = B_M(z^{-1})U(z) \quad (1.4.10)$$

oder wie im Bild 1.4.4 skizziert:

$$Y_M(z) = \frac{B_M(z^{-1})}{A_M(z^{-1})} U(z) . \quad (1.4.11)$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes, Gl. (1.4.5) läßt sich die diskrete Übertragungsfunktion, Gl. (1.4.8), in den Zeitbereich transformieren:

$$\begin{aligned} y_M(k) + a_{1M}^* y_M(k-1) + \dots + a_{nM}^* y_M(k-n) &= \\ &= b_{1M}^* u(k-1) + \dots + b_{nM}^* u(k-n) . \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

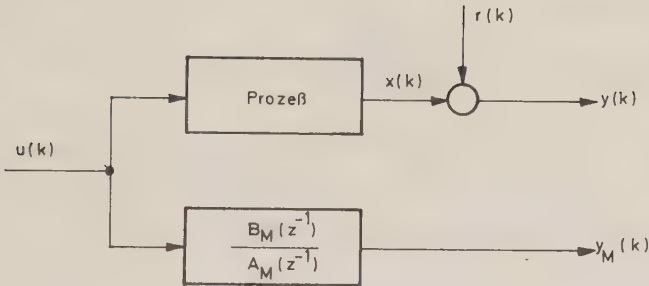


Bild 1.4.4: Grundstruktur des diskreten Modells^{*)}

Die Modell-Differenzengleichung kann noch weiter zusammengefaßt und auf folgende Standardform gebracht werden:

$$y_M(k) = - \sum_{i=1}^n a_{iM}^* y_M(k-i) + \sum_{i=1}^n b_{iM}^* u(k-i) \quad (1.4.13)$$

Die günstigsten Identifizierungsergebnisse hinsichtlich der Schätzung des unverrauschten Systemausgangs $x(k)$ erhält man, wenn die Modellstruktur gleich der Systemstruktur gewählt werden kann. Wir nehmen daher an, daß der kontinuierliche Prozeß durch folgende, Gl. (1.4.10) entsprechende, diskrete Form genügend genau beschrieben werden kann:

$$A_p(z^{-1})X(z) = B_p(z^{-1})U(z) \quad (1.4.14)$$

^{*)} Zur besseren Übersicht sind im Bild 1.4.4 wie auch in den folgenden Bildern die Signale in der zeitdiskreten Form bezeichnet statt in der z-transformierten Form, wie es korrekterweise sein müßte.

$$\text{oder} \quad X(z) = \frac{B_p(z^{-1})}{A_p(z^{-1})} U(z) \quad (1.4.15)$$

mit den Abkürzungen:

$$A_p(z^{-1}) = 1 + a_{1p}z^{-1} + \dots + a_{np}z^{-n} \quad (1.4.16)$$

$$B_p(z^{-1}) = b_{1p}z^{-1} + \dots + b_{np}z^{-n} .$$

Meßbar ist aber lediglich das verrauschte Signal $y(k)$, d.h. die Meßgleichung lautet:

$$y(k) = x(k) + r(k)$$

bzw. (1.4.17)

$$Y(z) = X(z) + R(z) .$$

$r(k)$ enthält dabei i.a. das Meßrauschen, auf den Systemausgang transformiertes Prozeßrauschen und weiterhin entsprechend transformierte Fehler, die durch eine notwendige Linearisierung des i.a. nichtlinearen Prozesses um den jeweiligen Arbeitspunkt entstanden sind.

Liegt die Struktur von System und Modell einmal fest, dann stellt sich die Aufgabe, mit Hilfe eines geeigneten Schätzverfahrens die Modellparameter a_{iM} , b_{iM} den unbekannten Prozeßparametern a_{ip} , b_{ip} möglichst genau anzugleichen, unter Verwendung der Meßwerte $\{u(k), y(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$. Um den Abstand zwischen System und Modell minimal werden zu lassen, muß ein Fehlersignal $e(k)$ definiert werden, auch Residuum genannt, das sich aus dem Vergleich von meßbarem Systemausgang und berechenbarem Modellausgang ergibt. Definieren wir $\tilde{e}(k)$ gemäß Bild 1.4.1 als unmittelbare Differenz

der Ausgangsgrößen

$$\tilde{e}(k) = y(k) - y_M(k) \quad (1.4.18)$$

$$\tilde{E}(z) = Y(z) - Y_M(z) = Y(z) - \frac{B_M(z^{-1})}{A_M(z^{-1})} U(z) \quad (1.4.19)$$

als Ausgangsfehler, so zeigt sich ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen dem Fehler $\tilde{E}(z)$ und dem zu schätzenden Parametern a_{iM} aus $A_M(z^{-1})$. Es läßt sich in diesem Falle kein lineares Schätzverfahren anwenden, sondern die Parameter a_{iM} , b_{iM} müssen iterativ bestimmt werden, wobei der numerische Aufwand gerade hinsichtlich eines Prozeßrechnereinsatzes sehr groß wird. Um ein möglichst einfaches, lineares Parameterschätzverfahren zur Bestimmung der unbekannten Systemparameter heranziehen zu können, wird ein linearer Zusammenhang zwischen Residuum und Parametern gesucht. Dies läßt sich durch Multiplikation der rechten Seite von Gl. (1.4.19) mit dem Operator $A_M(z^{-1})$ erreichen:

$$\begin{aligned} E(z) &= A_M(z^{-1}) [Y(z) - Y_M(z)] = A_M(z^{-1}) \tilde{E}(z) \\ &= A_M(z^{-1}) Y(z) - B_M(z^{-1}) U(z) \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

Gl. (1.4.20) beschreibt nun keinen Ausgangsfehler mehr, gegeben als Differenz zweier Signale, sondern einen Gleichungsfehler. Durch diese Fehlerdefinition läßt sich das Systemmodell auch nicht mehr als reines Parallelmodell ansehen, es stellt vielmehr ein Serien-Parallel-Modell dar. Diese Zusammenhänge werden aus den Bildern (1.4.5) und (1.4.6) erkennbar.

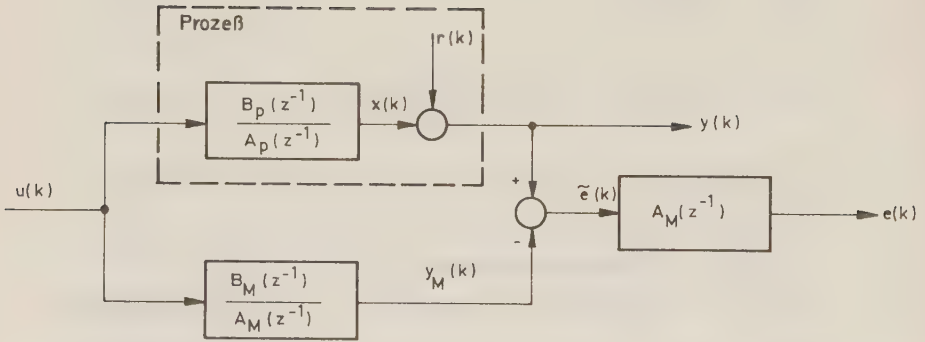


Bild 1.4.5: Gleichungsfehler-Modell (Filterung des Fehlersignals)

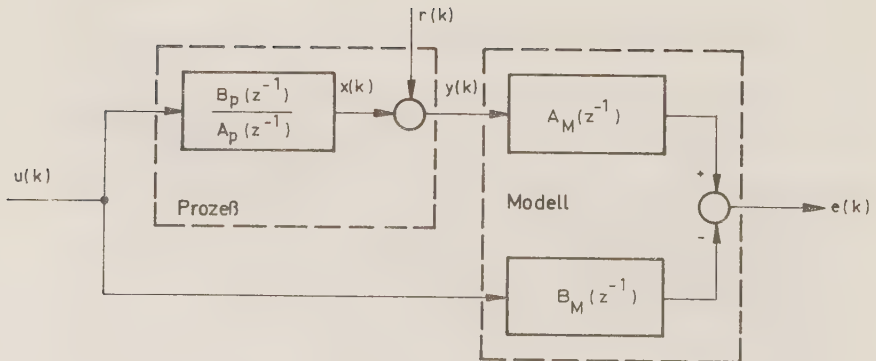


Bild 1.4.6: Serien-Parallel-Modell

1.4.2 Parameterschätzung.

Liegt die System- oder Modellstruktur einmal fest, dann stellt sich die Aufgabe, aus geeigneten der vorhandenen Meßwerte möglichst genaue Schätzwerte der noch unbekannten Systemparameter zu erhalten, wobei möglichst alle Vorkenntnisse über die Systemstörungen zu berücksichtigen sind. Da die Meßwerte in der Praxis immer verrauscht sind, läßt sich diese Aufgabe als statistisches Schätzproblem oder Parameteroptimierungsproblem auffassen und mit bekannten statistischen Methoden behandeln. Die geschätzten Parameterwerte sollen dabei erwartungstreu oder biasfrei sein, d.h. bei beliebiger Anzahl von Meßwerten soll der Erwartungswert der Schätzung gleich den tatsächlichen Parametern sein, also ohne systematischem Fehler. Darüber hinaus ist eine konsistente Schätzung erwünscht, die eine Verbesserung der Schätzung hinsichtlich Mittelwert und Varianz durch Hinzunahme weiterer Meßwerte ausdrückt.

Als einfachstes lineares Schätzverfahren ist die Regressionsanalyse anzusehen, auch Schätzung nach den kleinsten Fehlerquadraten oder Least-squares-Schätzung genannt. Dieses Verfahren liefert nur dann biasfreie, konsistente Schätzungen, falls der Schätzfehler in Form eines Ausgangsfehlers vorliegt und sich weiterhin die Störungen wie regelloses weißes Rauschen verhalten. Um aber ein lineares Schätzverfahren anwenden zu können, mußte der Schätzfehler im dynamischen Ein- Ausgangsmodell als Gleichungsfehler definiert werden. Dies führt zur charakteristischen Eigenschaft, daß selbst bei Störungen, die als weißes Geräusch gelten können, die Least-squares-Schätzung einen systematischen Fehler liefert. Dies wird aus der Struktur der zugrunde liegenden System- und Meßgleichung deutlich.

Es war:

$$A_p(z^{-1})X(z) = B_p(z^{-1})U(z) \quad (1.4.14)$$

$$Y(z) = X(z) + R(z) \quad . \quad (1.4.17)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A_p(z^{-1})Y(z) &= B_p(z^{-1})U(z) + A_p(z^{-1})R(z) & (1.4.21) \\ &= B_p(z^{-1})U(z) + E(z) \end{aligned}$$

mit

$$E(z) = A_p(z^{-1})R(z) \quad . \quad (1.4.22)$$

Aus Gl. (1.4.21) wird deutlich, daß die Least-squares-Schätzung bei dem vorliegenden Systemmodell nur dann biasfreie Parameterwerte liefern kann, wenn der Gleichungsfehler $e(k)$ weißes Rauschen darstellt. Tatsächlich aber ist $e(k)$ eine Funktion der Störung $r(k)$ und der Störsignale zu früheren Zeitpunkten, somit ein korreliertes Fehlersignal, das zu diesem systematischen Schätzfehler führt.

Es gibt nun eine Reihe von statistischen Verfahren, die versuchen, diesen Fehler zu reduzieren oder abzubauen. In den meisten Fällen wird dabei das Systemmodell um ein besonderes Störmodell erweitert, das die Korrelationen mitzuerfassen erlaubt. Man versucht dann, durch Filterung das Störsignal $e(k)$ in weißes Rauschen umzuformen. Verfahren dieser Art sind das verallgemeinerte Least-squares-Verfahren, das Tally-Prinzip, das PKF-Verfahren und die Maximum-Likelihood-Schätzung /10/, /11/. Beim Korrelationsverfahren /12/ läßt sich durch Filterung von Ein- und Ausgangsgröße ein unkorre-

liertes Signal $e(k)$ erzeugen. Schließlich lassen sich asymptotisch biasfreie Schätzungen mit dem Hilfsvariablenverfahren erzielen, bei dem durch Filterung des Eingangssignals Hilfsvariablen gewonnen und zur Parameterschätzung herangezogen werden, die zwar streng mit dem Eingangssignal, nicht aber mit dem Störsignal korreliert sind /1/, /13/.

1.5 Ziel und Abgrenzung dieser Arbeit

Einleitend wurden vier Forderungen an ein geeignetes Identifizierungsverfahren gestellt:

1. Universelle Verwendbarkeit;
2. Statistisch gesicherte Schätzergebnisse ohne systematischen Fehler;
3. Berücksichtigung der speziellen Prozeßrechner-eigenschaften;
4. Leichte Weiterverwendbarkeit des Schätzergebnisses.

Zur Erfüllung dieser Forderungen müssen erhebliche Einschränkungen hinsichtlich der Klasse von Identifikationsverfahren, der Modellstruktur und der Parameterschätzverfahren in Kauf genommen werden. Im einzelnen läßt sich eine Abgrenzung nach Tabelle 1.5.1 vornehmen. Gehen wir demnach von dem Ziel aus, eine Regelung zu entwerfen oder zu verbessern, wobei uns ein Prozeßrechner zur Verfügung steht, dann werden wir uns auf die Klasse der Modellverfahren beschränken. Es ist dabei eine bestimmte Struktur festzulegen, a priori oder aufgrund statistischer Tests. Schließlich sind die noch unbekannten Parameter in geeigneter, d.h. in der bestmöglichen Weise zu bestimmen. Die Systembeschreibung muß die wesentliche Prozeßdynamik

Z i e l :	Regelung	PR-Einsatz
Prozeßmodell:	Struktur/Parameter	
Modellansatz:	dynamisch	diskret
Modellstruktur:	linear in den Parametern	niedrige Ordnung
Schätzverfahren:	stabil	geringe Rechenzeit schnelle Konvergenz
Schätzergebnis:	biasfrei, konsistent	begrenzte Daten- menge

Tabelle 1.5.1: Abgrenzung der Identifizierungsaufgabe

mathematisch formulieren, der Einfachheit halber in zeitdiskreter Form. Um ein solches Verfahren im on-line-Betrieb, bei begrenzter Rechenzeit, einsetzen zu können, gehen wir von einer Modellstruktur von möglichst geringer Ordnung aus, wobei weiterhin eine Form gewählt wird, die linear in den Parametern ist, um eine iterative Lösung des Schätzproblems zu vermeiden. Linear in den Parametern deutet auf einen linearen Zusammenhang zwischen dem Schätzfehler (Gleichungsfehler) und den unbekannten Parametern hin. Die Bestimmung dieser freien Parameter muß mit Hilfe eines numerisch stabilen statistischen Schätzverfahrens erfolgen, was von besonderer Wichtigkeit hinsichtlich der begrenzten Wortlänge, des häufig sehr engen Zahlenbereichs von Prozeßrechnern ist. Weiterhin wird möglichst geringe Rechenzeit, schnelle Konvergenz und geringer Speicherbedarf von Schätzverfahren verlangt. Als Ergebnis soll eine Parameterschätzung ohne systematischen Fehler zur Verfügung stehen, also eine biasfreie Schätzung,

die darüber hinaus auch konsistent sein soll, mithin von möglichst kleiner Varianz. Solchen asymptotischen Schätzeigenschaften, wie beispielsweise Konsistenz, steht in der Praxis allerdings eine durch die Meßzeit begrenzte Datenmenge entgegen.

In letzter Zeit sind einige Vergleiche des Leistungsvermögens von Modellverfahren zur Identifizierung linearer, dynamischer Systeme, in zeitdiskreter Form und mit zeitinvarianten Parametern, durchgeführt worden /10/, /13/, /14/, /15/, /16/. Es haben sich dabei 2 Verfahren als besonders wirksam erwiesen, den bei der grundlegenden Least-squares-Schätzung auftretenden systematischen Schätzfehler abzubauen: Das Korrelationsverfahren (KOR) /12/, das im Anhang A1 beschrieben ist, und die Hilfsvariablenmethode (IVA = instrumental-variables-method), die von allen verbesserten Verfahren den geringsten numerischen Aufwand benötigt. Ein direkter Vergleich beider Verfahren bei Systemen bis vierter Ordnung ließ erkennen, daß das Korrelationsverfahren zwar erheblich mehr Rechenzeit und auch mehr Speicherplatz benötigt als das Hilfsvariablenverfahren, dafür aber eine erheblich bessere numerische Stabilität aufweist als das bisher betrachtete rekursive IVA-Verfahren. Im stabilen Fall waren die Schätzergebnisse beider Verfahren etwa gleich gut /14/.

Der in /14/ durchgeführte Vergleich des numerischen Aufwandes der untersuchten, rekursiven Schätzverfahren ergab die in Tabelle 1.5.2 dargestellten Verhältnisse für das Least-squares-Verfahren (LS), die Hilfsvariablenmethode (IVA) und das Korrelationsverfahren (KOR). Dabei ist die Zahl der arithmetischen Operationen pro Rekursion (Abtastschritt) und die Anzahl der benötigten Speicherplätze in Abhängigkeit von der Modellordnung n , und beim KOR-Verfahren von der Zahl der Korrelationsfunktionswerte M dargestellt. Als Beispiel wurde gewählt: $n = 2$, $M = 20$.

Verfahren:		LS	IVA	KOR
Multiplikationen	allg.	$8n^3 + 16n^2 + 8n$	$8n^3 + 16n^2 + 14n$	$(M+1)(8n^2 + 24n + 16) + M(2n+1) + n^2 + n$
	n=2 M=20	144	156	2242
Additionen	allg.	$8n^3 + 8n^2 + 7n$	$8n^3 + 8n^2 + 16n$	$(M+1)(4n^2 + 10n + 6) + 2n^2 + 4n$
	n=2 M=20	110	128	1148
Speicherplätze	allg.	$8n^2 + 8n$	$8n^2 + 12n$	$M(2n+2) + 2M + 4n^2 + 12n$
	n=2 M=20	48	56	200

Tabelle 1.5.2: Numerischer Aufwand von Schätzverfahren
pro Rekursion (n=Modellordnung,
M=Zahl der Korrelationsfunktionswerte)

Aus Tabelle 1.5.2 wird deutlich, daß in dieser rekursiven Form der numerische Aufwand des IVA-Verfahrens nur unwesentlich größer ist als der des einfachen LS-Verfahrens, während das KOR-Verfahren doch erheblich aufwendiger ist. Zwar kann die hohe Zahl von arithmetischen Operationen durch Verwendung des in Kapitel 2 beschriebenen Householder-Verfahrens zur Datenreduktion beträchtlich reduziert werden, dennoch bleibt ein wesentlicher Abstand zum geringen numerischen Aufwand des IVA-Verfahrens.

In der vorliegenden Arbeit wird ein numerisches Verfahren abgeleitet, das von der bekannten Hilfsvariablentheorie ausgeht und damit die statistischen Voraussetzungen für biasfreie bzw. konsistente Parameterschätzungen in dynamischen Systemen erfüllt. Die Vorteile des neuen

Verfahrens liegen in

- der universellen Verwendbarkeit,
- der guten numerischen Stabilität,
- dem ausgesprochen geringen numerischen Aufwand,
- der leichten Erweiterung auf Mehrgrößensysteme,
- dem problemlosen Einsatz zur Identifizierung im geschlossenen Regelkreis.

Universell verwendbar heißt, daß das Verfahren beliebig rekursiv oder auch nichtrekursiv eingesetzt werden kann. Gegenüber dem bekannten rekursiven IVA-Algorithmus wird dessen hohe numerische Empfindlichkeit wesentlich verbessert und dessen schon geringer numerischer Aufwand noch weiter reduziert. Damit ist auch die Erweiterung auf Mehrgrößensysteme vom Aufwand her durchaus sinnvoll und einfach durchführbar. Schließlich ist dieses Verfahren auch zur Identifizierung im geschlossenen Regelkreis geeignet, und es lassen sich in einfacher Weise zeitvariable Parameter erfassen.

2. Lösungen des Parameter-Schätzproblems

Ausgehend von der zeitdiskreten Systembeschreibung nach Gl. (1.4.21) ist die Regressionsanalyse oder Methode der kleinsten Fehlerquadrate das einfachste statistische Verfahren, Schätzungen der unbekannten Systemparameter aufgrund verrauschter Meßsignale zu erhalten. Es liefert allerdings einen systematischen Fehler, da der "Abstand" zwischen System und Modell als Gleichungsfehler $e(k)$ definiert werden mußte. Da diese Least-squares-Schätzung aber von fundamentaler Bedeutung für alle verbesserten Verfahren dieser Klasse ist, also auch für das Hilfsvariablenverfahren, soll deren Grundprinzip wie das der IVA-Methode hier kurz skizziert werden. Zunächst seien einige Definitionen der statistischen Eigenschaften einer Parameterschätzung vorangestellt.

2.1 Eigenschaften von Parameterschätzungen

Bei einer beliebigen Anzahl N von Messungen der Systemeingangs- und Ausgangssignale sei $\underline{\hat{b}}$ eine Schätzung des tatsächlichen Parametervektors $\underline{b}$. Ist der mathematische Erwartungswert $E \{ \underline{\hat{b}} \}$ gleich dem exakten Wert $\underline{b}$, dann bezeichnet man diese Schätzung als biasfrei oder erwartungstreu:

$$E \{ \underline{\hat{b}}(N) - \underline{b} \} = \underline{0} \quad (2.1.1)$$

$$\text{oder} \quad E \{ \underline{\hat{b}}(N) \} = E \{ \underline{b} \} = \underline{b} \quad (2.1.2)$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann wird der resultierende systematische Fehler $\underline{\varepsilon}_b$ Bias genannt:

$$E \{ \underline{\hat{b}}(N) - \underline{b} \} = E \{ \underline{\hat{b}}(N) \} - \underline{b} = \underline{\varepsilon}_b = \underline{0} \quad (2.1.3)$$

Eine Schätzung $\underline{\beta}$ heißt konsistent oder übereinstimmend, wenn sie mit wachsender Anzahl von Meßwerten immer besser wird, d.h. wenn $\underline{\beta}$ mit der Wahrscheinlichkeit Eins gegen den wahren Wert $\underline{b}$ strebt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \{ [\underline{\beta}(N) - \underline{b}] = 0 \} = 1 . \quad (2.1.4)$$

Konsistenz beschreibt demnach ein asymptotisches Verhalten, eine konsistente Schätzung ist daher immer asymptotisch biasfrei. Wünschenswert ist die Eigenschaft, daß nicht nur der Bias, sondern auch die Varianz asymptotisch verschwindet. Diese Eigenschaft heißt dann konsistent im quadratischen Mittel:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ (\underline{\beta}(N) - \underline{b})^2 \} = 0 . \quad (2.1.5)$$

Läßt sich eine Schätzung mit minimaler Varianz erzielen, hat diese Schätzung also unter allen biasfreien Schätzungen unter gleichen Voraussetzungen die kleinstmögliche Streuung, dann ist sie effizient oder wirksam:

$$E \{ (\underline{\beta}(N) - \underline{b})^2 \} \leq E \{ (\underline{\gamma}(N) - \underline{b})^2 \} \quad (2.1.6)$$

für alle $\underline{\gamma}(N)$.

Ist diese Bedingung nur für $N \rightarrow \infty$ erfüllt, spricht man von asymptotischer Effizienz.

Schließlich heißt eine Schätzung erschöpfend oder hinreichend (sufficient), wenn sie alle Informationen über $\underline{b}$ verwendet, die in den Meßwerten $\{y, u\}$ enthalten sind. Eine erschöpfende Schätzung ist daher von größtmöglicher Effizienz oder von kleinster Varianz.

2.2 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Für den als linear betrachteten, dynamischen Prozeß, an dem zu diskreten Zeitpunkten $k \cdot T_0$ Meßwerte von Ein- und Ausgangssignalen vorliegen, galt folgende Beschreibung:

$$A_p(z^{-1})X(z) = B_p(z^{-1})U(z) \quad (1.4.14)$$

$$Y(z) = X(z) + R(z) \quad (1.4.17)$$

Es soll nun angenommen werden, daß die Modellgleichung der Systemgleichung (1.4.14) genau entspricht, d.h. das Modellausgangssignal $y_M(k)$ soll dem unverrauschten Systemausgang $x(k)$ genau gleich sein. Dann kann die Indizierung entfallen:

$$\begin{aligned} A_p(z^{-1}) &= A_M(z^{-1}) = A(z^{-1}) \\ B_p(z^{-1}) &= B_M(z^{-1}) = B(z^{-1}) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Damit läßt sich Strecken- und Meßgleichung im Eingrößenfall, der hier zunächst vorausgesetzt wird, wie folgt angeben:

$$A(z^{-1})X(z) = B(z^{-1})U(z) \quad (2.2.2)$$

$$Y(z) = X(z) + R(z) \quad (2.2.3)$$

$$\text{bzw. } y(k) = x(k) + r(k) \quad (2.2.3)$$

Zusammenfassen beider Gleichungen führt zur Ein-/Ausgangsbeschreibung des Systemverhaltens (Bild 2.2.1):

$$A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})U(z) + E(z) \quad (2.2.4)$$

$$\text{mit } E(z) = A(z^{-1})R(z) \quad (2.2.5)$$

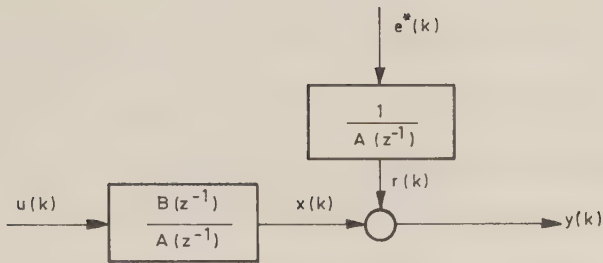


Bild 2.2.1: Systembeschreibung bei der LS-Schätzung

Gl. (2.2.4) stellt infolge des Fehlersignals $e(k)$ eine Regressionsgleichung dar. Die unbekannten Parameter a_i in $A(z^{-1})$ und b_i in $B(z^{-1})$ können durch eine Regressionsanalyse nur dann biasfrei bestimmt werden, wenn $e(k)$ ein völlig regelloses Signal ist, sich also wie weißes Rauschen $e^*(k)$ verhält. Weiterhin wird Gl. (2.2.5) und Bild (2.2.1) deutlich, daß sich die Störung $r(k)$ im Prozeß, die sich ja aus Systemrauschen, Meßrauschen und nichtlinearen Termen zusammensetzt, über ein Formfilter mit der diskreten Übertragungsfunktion

$$F_z(z^{-1}) = \frac{1}{A(z^{-1})}$$

aus weißem Rauschen $e^*(k)$ ableiten lassen muß. Da dies ein sehr spezieller Fall ist, kann man davon ausgehen, daß die Regressionsanalyse oder die Methode nach dem kleinsten Fehlerquadrat in der Praxis immer einen systematischen Schätzfehler bei dynamischen Systemen entsprechend Gl. (2.2.4) liefern wird.

2.2.1 Explizites Schätzverfahren.

Die Ein-/Ausgangsbeschreibung des linearen, dynamischen Eingrößen-

systems war wie folgt definiert worden:

$$A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})U(z) + E(z) \quad . \quad (2.2.4)$$

Wird die Operatorenschreibweise aufgelöst, dann ergibt sich für ein nichtsprungfähiges System n-ter Ordnung im Zeitbereich:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) + e(k) \quad (2.2.6)$$

oder auch:

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + e(k) \quad . \quad (2.2.7)$$

Fassen wir die Meßwerte $\{y(k), u(k)\}$ im Meßwertvektor $\underline{m}(k)$ zusammen, und weiterhin die Parameter a_i, b_i im Parametervektor $\underline{p}$, dann wird aus Gl. (2.2.7):

$$y(k) = \underline{m}^T(k) \underline{p} + e(k) \quad (2.2.8)$$

mit den Abkürzungen:

$$\underline{m}^T(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n) \mid u(k-1), \dots, u(k-n)] \quad (2.2.9)$$

$$\underline{p}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n \mid b_1, b_2, \dots, b_n] \quad . \quad (2.2.10)$$

Es soll weiterhin gelten:

$$\underline{m}^T(k) = [-\underline{m}_y^T(k) \mid \underline{m}_u^T(k)] \quad (2.2.11)$$

$$\text{mit} \quad \underline{m}_y^T(k) = [y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)] \quad (2.2.12)$$

$$\underline{m}_u^T(k) = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n)] \quad .$$

Ebenso soll gelten:

$$\underline{P}^T = \begin{bmatrix} \underline{P}_y^T & \vdots & \underline{P}_u^T \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

mit
$$\underline{P}_y^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\underline{P}_u^T = [b_1, b_2, \dots, b_n] \quad .$$

Schreiben wir Gl. (2.2.8) aus der Menge aller gemessenen Daten $\{u(k), y(k)\}$ von $k = 1, 2, \dots, n+N$ für N Beobachtungen

an, mit $k = n+1, n+2, \dots, n+N$, so folgt:

$$\boxed{\underline{y} = \underline{M} \underline{p} + \underline{e}} \quad (2.2.15)$$

mit
$$\underline{y}^T = [y(n+1), y(n+2), \dots, y(n+N)]$$
 (2.2.16)

$$\underline{e}^T = [e(n+1), e(n+2), \dots, e(n+N)] \quad (2.2.17)$$

und der Meßwertmatrix $\underline{M}$:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{m}^T(n+1) \\ \underline{m}^T(n+2) \\ \vdots \\ \underline{m}^T(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) \dots \dots \dots -y(1) & \vdots & u(n) \dots \dots \dots u(1) \\ -y(n+1) \dots \dots \dots -y(2) & \vdots & u(n+1) \dots \dots \dots u(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n+N-1) \dots \dots \dots -y(N) & \vdots & u(n+N-1) \dots \dots \dots u(N) \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

Eine andere Aufspaltung ergibt:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} -\underline{M}_y & \vdots & \underline{M}_u \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

mit:

$$\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{y}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{y}}}^T(n+1) \\ \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{y}}}^T(n+2) \\ \vdots \\ \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{y}}}^T(n+N) \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{u}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{u}}}^T(n+1) \\ \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{u}}}^T(n+2) \\ \vdots \\ \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{u}}}^T(n+N) \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{y}}}^T(k) &= [y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)] \\ \underline{\underline{m}}_{\underline{\underline{u}}}^T(k) &= [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n)] \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Auflösen von Gl. (2.2.15) nach dem Fehlersignal $\underline{\underline{e}}$ ergibt:

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{Y}} - \underline{\underline{M}}\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{Y}} - \underline{\underline{Y}}_{\underline{\underline{M}}} \quad (2.2.21)$$

Die Least-squares-Schätzung minimiert eine Verlustfunktion, die aus der Summe der Fehlerquadrate $e^2(k)$ gebildet wird:

$$\hat{J} = \sum_{k=n+1}^{N+n} e^2(k) = \underline{\underline{e}}^T \underline{\underline{e}} = \|\underline{\underline{e}}\|^2 = \|\underline{\underline{Y}}(k) - \underline{\underline{M}}(k)\underline{\underline{p}}\|^2 \quad (2.2.22)$$

An der Stelle des Minimums gilt hinreichend und notwendig:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \hat{J}}{\partial \underline{\underline{p}}} \right|_{\underline{\underline{p}}=\hat{\underline{\underline{p}}}} &= 0 \\ &= -2\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{y}} + 2\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}} \hat{\underline{\underline{p}}} \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Daraus folgt die explizite oder nichtrekursive Schätzgleichung für den Parametervektor $\underline{p}$:

$$\hat{\underline{p}} = \left[\underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1} \underline{M}^T \underline{y} = \underline{M}^+ \underline{y} \quad (2.2.24)$$

mit der Abkürzung

$$\underline{M}^+ = \left[\underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1} \underline{M}^T \quad (2.2.25)$$

die als Pseudoinverse von $\underline{M}$ bezeichnet wird.

In Summenschreibweise läßt sich Gl. (2.2.24) in folgender Form angeben:

$$\hat{\underline{p}} = \left[\sum_{k=n+1}^{N+n} \underline{m}(k) \underline{m}^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=n+1}^{N+n} \underline{m}(k) y(k) \quad (2.2.26)$$

Wenn n die Systemordnung angibt, dann ist die Meßwertmatrix $\underline{M}$ eine Matrix der Ordnung $N \times 2n$, mit $N \geq 2n$. Die Bestimmung des Schätzwertes $\hat{\underline{p}}$ nach Gl. (2.2.24) oder Gl. (2.2.26) erfordert demnach die Inversion einer quadratischen und darüber hinaus symmetrischen Matrix $\underline{M}^T \underline{M}$ vom Rang $(2n \times 2n)$. Weiterhin müssen sämtliche Meßwerte bis zum Zeitpunkt $(n+N)T_0$ abgespeichert werden.

Für den Schätzfehler $\tilde{\underline{p}}$ nach N Messungen

$$\tilde{\underline{p}} = \hat{\underline{p}} - \underline{p} \quad (2.2.27)$$

folgt aus Gl. (2.2.24) und Gl. (2.2.15)

$$\tilde{\underline{p}} = \left[\underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1} \underline{M}^T \underline{e} = \underline{P} \underline{M}^T \underline{e} \quad (2.2.28)$$

mit
$$\underline{P} = \left[\underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1} \quad (2.2.29)$$

Über den Schätzfehler $\tilde{p}$ können wir zunächst keinerlei Aussage machen, da wir bisher keine Voraussetzung über das Störsignal $e(k)$ getroffen haben. Das Schätzproblem wurde bisher als rein deterministisches Parameter-Optimierungsproblem auf der Grundlage der kleinsten Fehlerquadrate behandelt. Gemäß Gl. (2.2.24) läßt sich damit eine Schätzung realisieren, die keinerlei Vorkenntnisse über die statistischen Eigenschaften des Fehlers $e(k)$ verlangt. Dies ist für einen Einsatz in der Praxis besonders wichtig. Um aber eine Aussage darüber zu erhalten, ob und unter welchen Bedingungen die Least-squares-Methode (LS-Schätzung) einen biasfreien und konsistenten Schätzwert $\hat{p}$ liefert, wird die Regressionsbeziehung, Gl. (2.2.7), als stochastischer Ausdruck aufgefaßt. Die Meßgrößen $\{u(k), y(k)\}$ und das Fehlersignal $r(k)$ bzw. $e(k)$ sind dann als Zufallsvariable zu betrachten, während der Vektor p die konstanten, aber unbekannten Systemparameter beschreibt. In diesem stochastischen Fall minimiert die Regressionsanalyse die gleiche Verlustfunktion, Gl. (2.2.22), wie bei der LS-Schätzung. Da auch die Bestimmungsgleichungen der Schätzparameter $\hat{p}$, Gl. (2.2.24) identisch sind, wird die Regressionsanalyse - definiert für den stochastischen Fall - der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (LS-Schätzung), die den deterministischen Fall beschreibt, begriffsmäßig gleichgesetzt. Soll $\hat{p}(N)$ bei endlicher Anzahl von Messungen N eine erwartungstreue Schätzung des tatsächlichen Parametervektors p sein, dann muß nach Gl. (2.1.1) der Erwartungswert des Schätzfehlers gleich Null sein, d.h.:

$$E \{ \hat{p}(N) - p \} = E \{ \tilde{p}(N) \} = 0. \quad (2.2.30)$$

Mit Gl. (2.2.15) und Gl. (2.2.24) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
 E \{ \hat{\underline{p}} \} &= E \{ [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{M} \underline{p} + [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{e} \} \\
 &= \underline{p} + E \{ [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{e} \} \quad (2.2.31) \\
 &= \underline{p} + \underline{\varepsilon}_b .
 \end{aligned}$$

$\underline{\varepsilon}_b$ stellt den Bias dar, der nur dann verschwindet, wenn $\underline{M}^T$ und $\underline{e}$ statistisch unabhängig sind und der Mittel- oder Erwartungswert $E \{ \underline{e} \} = \underline{0}$ ist. Bei statistischer Unabhängigkeit von $\underline{M}$ und $\underline{e}$ gilt:

$$E \{ [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{e} \} = E \{ [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \} E \{ \underline{e} \} . \quad (2.2.32)$$

Dann sind die in $\underline{M}$ enthaltenen Meßwerte $\{ \underline{u}, \underline{y} \}$ und $\underline{e}$ unkorreliert.

Gl. (2.2.32) wird weiterhin zu Null, wenn gilt:

$$E \{ \underline{e} \} = \underline{0} . \quad (2.2.33)$$

Sind $\underline{M}^T$ und $\underline{e}$ unkorreliert, dann wird die Bedingung (2.2.34) erfüllt:

$$E \{ \underline{M}^T \underline{e} \} = \underline{0} . \quad (2.2.34)$$

Nach Gl. (2.2.19) ist:

$$\underline{M}^T = \begin{bmatrix} -\underline{M}^T_{-y} \\ \dots \\ \underline{M}^T_{-u} \end{bmatrix} .$$

Multiplikation mit dem Fehlervektor $\underline{e}$ ergibt:

$$\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}_{ye}^T \\ \vdots \\ \underline{\underline{M}}_{ue}^T \end{bmatrix} \quad (2.2.35)$$

mit Gl. (2.2.20) und Gl. (2.2.12) folgt weiter:

$$\underline{\underline{M}}_{ye}^T \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{m}}_{ye}^T(n+1) \underline{\underline{e}} \\ \underline{\underline{m}}_{ye}^T(n+2) \underline{\underline{e}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{m}}_{ye}^T(n+N) \underline{\underline{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k)y(k-1) \\ \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k)y(k-2) \\ \vdots \\ \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k)y(k-n) \end{bmatrix} . \quad (2.2.36)$$

Die Summenausdrücke in Gl. (2.2.36) stellen Kreuzkorrelationsfunktionen dar für eine endliche Anzahl N von Messungen:

$$R_{ye}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k)y(k-\tau) , \quad \tau = 1, \dots, n \quad . \quad (2.2.37)$$

Damit wird aus Gl. (2.2.35):

$$\frac{1}{N} \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{R}}_{ye} \\ \vdots \\ \underline{\underline{R}}_{ue} \end{bmatrix} \quad (2.2.38)$$

$$\text{mit } \underline{\underline{R}}_{ye} = [R_{ye}(1), R_{ye}(2), \dots, R_{ye}(n)]^T \quad (2.2.39)$$

$$\underline{\underline{R}}_{ue} = [R_{ue}(1), R_{ue}(2), \dots, R_{ue}(n)]^T .$$

Für den Erwartungswert gilt entsprechend:

$$\frac{1}{N} E \left\{ \underline{M}^T \underline{e} \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} -\underline{R}_{ye} \\ \underline{R}_{ue} \end{bmatrix} \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} -\underline{R}_{ye} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.2.40)$$

Gl. (2.2.40) kennzeichnet die Identifizierung am offenen Kreis, d.h. es wird kein statistischer Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal $u(k)$ und dem Störsignal $e(k)$ angenommen. Demnach ist

$$\underline{R}_{ue} = \underline{0} \quad (2.2.41)$$

Bei der LS-Schätzung gilt folgender Zusammenhang zwischen dem Fehler-signal $e(k)$ und der Systemstörung $r(k)$, wie im Bild 2.2.1 skizziert wurde:

$$E(\underline{z}) = A(z^{-1}) R(\underline{z}) \quad (2.2.5)$$

$$e(k) = r(k) + a_1 r(k-1) + \dots + a_n r(k-n)$$

$$= r(k) + \underline{m}_r^T(k) \underline{p}_y \quad (2.2.42)$$

$$\text{wobei} \quad \underline{m}_r(k) = [r(k-1), r(k-2), \dots, r(k-n)]^T \quad (2.2.43)$$

Weiterhin war die Meßgleichung (2.2.3):

$$y(k) = x(k) + r(k) \quad .$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (2.2.37) ein und bildet den Erwartungswert, dann erhält man:

$$E \left\{ \underline{R}_{ye}(\tau) \right\} = \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k) x(k-\tau) + r(k-\tau) \right\} \quad (2.2.44)$$

$$\text{oder} \quad E \{ R_{y\bullet}(\tau) \} = \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k) r(k-\tau) \right\} \quad (2.2.45)$$

$$= E \{ R_{r\bullet}(\tau) \} \quad \text{für } \tau = 1, \dots, n.$$

Dabei ist berücksichtigt, daß auch der unverrauschte Systemausgang $x(k)$ und $e(k)$ unkorreliert sind. Gl. (2.2.34) ist nur dann erfüllt, wenn Gl. (2.2.45) zu Null wird:

$$E \{ R_{r\bullet}(\tau) \} = 0 \quad \text{für alle } \tau = 1, \dots, n \quad (2.2.46)$$

mit Gl. (2.2.42) wird:

$$\begin{aligned} E \{ R_{r\bullet}(\tau) \} &= \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k) r(k-\tau) \right\} \\ &= \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+N} [e(k)e(k-\tau) - e(k)\underline{u}(k-\tau)\underline{e}_y] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

Man erkennt, daß die Ausdrücke $E \{ R_{u\bullet}(\tau) \}$ nur dann identisch verschwinden können, wenn das Fehlersignal keinen inneren statistischen Zusammenhang hat, d.h. es darf nicht autokorreliert sein. Die Autokorrelationsfunktion ist dann nur für $\tau = 0$ definiert:

$$R_{\bullet\bullet}(0) = \sigma_{\bullet}^2 \delta(\tau) \quad \text{mit} \quad \delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{für } |\tau| \neq 0 \end{cases}. \quad (2.2.48)$$

Wir erhalten demnach nur dann erwartungstreue LS-Schätzungen, wenn 3 Bedingungen erfüllt sind:

$$1. \quad E \{ e(k) \} = 0$$

$$2. \quad E \{ e(k)e(j) \} = \sigma_e^2 \delta_{kj} \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (2.2.49)$$

$$3. \quad E \{ u(k)e(j) \} = 0 \quad \forall k, j.$$

Nach der 1. und 2. Bedingung muß sich $e(k)$ wie weißes Rauschen $e^*(k)$ verhalten mit dem Mittelwert Null. Mit Gl. (2.2.5) wird aber auch deutlich, daß selbst bei weißem Systemrauschen $r(k)$ die LS-Methode immer einen systematischen Fehler liefern muß, da $e(k)$ über den Operator $A(z^{-1})$ ein autokorreliertes Signal darstellt.

Die Kovarianzmatrix der Schätzfehler $\tilde{p} = \hat{p} - p$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \underline{P}^* &= \text{cov} [\tilde{p}] = E \{ \tilde{p} \tilde{p}^T \} \\ &= E \{ \underline{p} \underline{M}^T \underline{e} \underline{e}^T \underline{M} \underline{P}^T \} \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

$$\text{mit } \underline{P} = \left[\underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1}.$$

Bei statistischer Unabhängigkeit von $\underline{M}$ und $\underline{e}$ gilt:

$$\underline{P}^* = E \{ \underline{p} \underline{M}^T \} E \{ \underline{e} \underline{e}^T \} E \{ \underline{M} \underline{P}^T \}. \quad (2.2.51)$$

Ist $\underline{e}$ unkorreliert mit dem Mittelwert 0, dann ist:

$$E \{ \underline{e} \underline{e}^T \} = E \{ \underline{e}^* \underline{e}^{*T} \} = \sigma_e^2 \underline{I}. \quad (2.2.52)$$

Einsetzen in Gl. (2.2.51) führt zu:

$$\underline{P}^* = \sigma_e^2 E \{ \underline{p} \underline{M}^T \} E \{ \underline{M} \underline{P}^T \} = \sigma_e^2 E \{ \underline{p} \} E \{ \underline{M}^T \underline{M} \} E \{ \underline{P}^T \}$$

$$\underline{P}^* = \sigma_e^2 \underline{P} = \sigma_e^2 \left[\underline{M}^T \underline{M} \right]^{-1}. \quad (2.2.53)$$

Die Varianz σ_e^2 des Fehlers $e(k)$ ist im allgemeinen unbekannt. Es läßt sich aber ein erwartungstreuere Schätzwert $\hat{\sigma}_e^2$ angeben, der wie folgt definiert ist /8/,/17/:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{N-n} \underline{e}^T(N) \underline{e}(N) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k) \quad . \quad (2.2.54)$$

2.2.2 Rekursives Schätzverfahren.

Die Anwendung der expliziten Parameterschätzung im on-line-Betrieb bedingt die fortlaufende Invertierung der Matrix $[\underline{M}^T \underline{M}]$ nach Gl. (2.2.24), sofern laufend neue Meßwerte anfallen und diese zur Verbesserung der Schätzung herangezogen werden sollen. Weiterhin müssen sämtliche Meßwerte in der Matrix $\underline{M}$ abgespeichert werden. Um diesen bei langen Meßzeiten erheblichen numerischen Aufwand und den großen Speicherbedarf im Digitalrechner zu umgehen, wird eine rekursive Form dieser Schätzgleichung angestrebt, die sich durch eine schrittweise Verbesserung des bisher gefundenen Schätzwertes durch Hinzunahme jeweils nur einer einzigen neuen Messung auszeichnet. Die Ableitung des rekursiven Algorithmus erfolgt über die sogenannte Änderungstechnik /18/. Ändern einer Matrix bedeutet die Erweiterung dieser Matrix durch Hinzunahme einer weiteren Zeile, hier der neuesten Information. Liegen bereits N Messungen vor und kommt eine weitere hinzu, gilt nach Gl. (2.2.18):

$$\underline{M}(N+1) = \begin{bmatrix} \underline{e}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{e}^T(n+N) \\ \vdots \\ \underline{e}^T(n+N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M}(N) \\ \text{-----} \\ \underline{e}^T(n+N+1) \end{bmatrix} \quad (2.2.55)$$

Entsprechend wird aus Gl. (2.2.16):

$$\underline{y}(N+1) = [y(n+1), \dots, y(n+N) ; y(n+N+1)]^T = [\underline{y}(N) ; y(n+N+1)]^T . \quad (2.2.56)$$

Die explizite Schätzgleichung (2.2.24) kann dann wie folgt beschrieben werden:

$$\hat{\underline{p}}(N+1) = [\underline{M}^T(N+1)\underline{M}(N+1)]^{-1} \underline{M}^T(N+1)\underline{y}(N+1) . \quad (2.2.57)$$

Mit der Abkürzung:

$$\underline{P}(N+1) = [\underline{M}^T(N+1)\underline{M}(N+1)]^{-1} \quad (2.2.58)$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{P}(N) = [\underline{M}^T(N)\underline{M}(N)]^{-1}$$

wird aus Gl. (2.2.57):

$$\begin{aligned} \hat{\underline{p}}(N+1) &= \underline{P}(N+1) \underline{M}^T(N+1) \underline{y}(N+1) \\ &= \underline{P}(N+1) \begin{bmatrix} \underline{M}(N) \\ \text{-----} \\ \underline{M}^T(n+N+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{y}(N) \\ \text{-----} \\ y(n+N+1) \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

Ausmultiplizieren dieser Gleichung führt zu:

$$\hat{\underline{p}}(N+1) = \underline{P}(N+1) [\underline{M}^T(N)\underline{y}(N) + \underline{m}(n+N+1)y(n+N+1)] . \quad (2.2.60)$$

Andererseits läßt sich $\underline{P}(N+1)$ nach Gl. (2.2.58) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \underline{P}(N+1)^{-1} &= \underline{M}^T(N+1)\underline{M}(N+1) \\ &= [\underline{M}^T(N) ; \underline{m}(n+N+1)] \begin{bmatrix} \underline{M}(N) \\ \text{-----} \\ \underline{M}^T(n+N+1) \end{bmatrix} \\ &= \underline{P}(N)^{-1} + \underline{m}(n+N+1) \underline{m}^T(n+N+1) . \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

Nach dem sogenannten Matrizen-Inversions-Lemma gilt nun /8/,/10/

$$\begin{aligned} [\underline{P}(N)^{-1} + \underline{m}(n+N+1)\underline{m}^T(n+N+1)]^{-1} &= \underline{P}(N+1) = \\ &= \underline{P}(N) - \underline{P}(N)\underline{m}(n+N+1)[1 + \underline{m}^T(n+N+1)\underline{P}(N)\underline{m}(n+N+1)]^{-1} \\ &\quad \cdot \underline{m}^T(n+N+1)\underline{P}(N) \end{aligned} \quad (2.2.62)$$

Mit der Abkürzung $\gamma(N+1)$ für den zu invertierenden skalaren Ausdruck:

$$\gamma(N+1) = [1 + \underline{m}^T(n+N+1)\underline{P}(N)\underline{m}(n+N+1)]^{-1} \quad (2.2.63)$$

folgt weiter:

$$\underline{P}(N+1) = \underline{P}(N) - \gamma(N+1)\underline{P}(N)\underline{m}(n+N+1)\underline{m}^T(n+N+1)\underline{P}(N). \quad (2.2.64)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (2.2.60) ein, dann erhält man nach einigen Umformen die bekannte rekursive Regressionsgleichung:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{p}}(N+1) &= \hat{\underline{p}}(N) + \Delta \hat{\underline{p}}(N+1) \\ &= \hat{\underline{p}}(N) + \gamma(N+1)\underline{P}(N)\underline{m}(n+N+1)[y(n+N+1) - \underline{m}^T(n+N+1)\hat{\underline{p}}(N)] \\ &= \hat{\underline{p}}(N) + \underline{P}(N+1)\underline{m}(n+N+1)e(n+N+1). \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

In der bisher verwandten Schreibweise stellt $\hat{\underline{p}}(N)$ eine Parameterschätzung aufgrund von N Datensätzen $\{y(k), u(k)\}$ dar, wobei insgesamt aber $N+1$ Datensätze vorliegen müssen, um $\hat{\underline{p}}(N)$ vollständig bestimmen zu können.

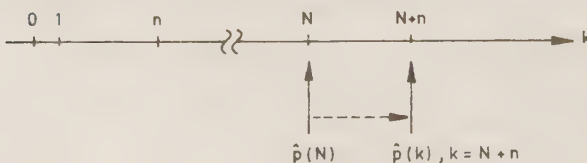


Bild 2.2.1: Transformation von $\hat{\underline{p}}(N)$ zur rekursiven Darstellung

Für rekursive Darstellungen ist es aber üblich, mit k in $\hat{p}(k)$ die Nummer bzw. den Zeitpunkt der jeweils neuesten Schätzung zu bezeichnen statt die Anzahl von berücksichtigten Datensätzen. In diesem Fall ist $\hat{p}(k)$ eine Schätzung, die im Intervall $kT_0 < t < (k+1)T_0$ konstant ist und sich auf Meßwerte $\{u(j), y(j), j \leq k\}$ stützt, also auf Werte bis zum Zeitpunkt kT_0 einschließlich. In dieser Form wird eine direkte Analogie der Parameterschätzung zur Filterung hergestellt, wobei dann $\hat{p}(N)$ bei $N+n$ Meßwerten eine Glättung beschreiben würde /8/, /17/.

Die übliche rekursive Darstellung ergibt sich sofort, wenn die Größen $\hat{p}(N)$, $\underline{P}(N)$, $\underline{M}(N)$, $\mathcal{T}(N)$ gemäß Bild 2.2.1 ersetzt werden durch $\hat{p}(N+n)$, $\underline{P}(N+n)$, $\underline{M}(N+n)$, $\mathcal{T}(N+n)$. Dann ergibt sich:

$$\hat{p}(k+1) = \hat{p}(k) + \mathcal{T}(k+1)\underline{P}(k)\underline{m}(k+1)[y(k+1) - \underline{m}^T(k+1)\hat{p}(k)] \quad (2.2.66)$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \mathcal{T}(k+1)\underline{P}(k)\underline{m}(k+1)\underline{m}^T(k+1)\underline{P}(k) \quad (2.2.67)$$

mit den Abkürzungen:

$$\underline{P}(k) = [\underline{M}^T(k)\underline{M}(k)]^{-1} \quad (2.2.68)$$

$$\mathcal{T}(k+1) = [1 + \underline{m}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{m}(k+1)]^{-1} \quad (2.2.69)$$

Um auf eine dem Kalman-Filter entsprechende Form zu kommen, kürzt man weiterhin ab:

$$\underline{K}(k+1) = \mathcal{T}(k+1)\underline{P}(k)\underline{m}(k+1) \quad (2.2.70)$$

Durch Einführen des zeitvarianten "Verstärkungs"-Vektors $\underline{K}(k+1)$ läßt sich die Parameter-Schätzgleichung wie folgt angeben:

$$\hat{p}(k+1) = \hat{p}(k) + \underline{K}(k+1) [y(k+1) - y(k+1/k)] \quad (2.2.71)$$

mit

$$y(k+1/k) = \underline{m}^T(k+1)\hat{p}(k) \quad (2.2.72)$$

Der rechte Klammerausdruck in Gl. (2.2.71) stellt das Fehlersignal $e(k+1)$ als Differenz zwischen Prozeßausgangssignal und vorhergesagtem Modellausgangssignal dar:

$$e(k+1) = y(k+1) - y(k+1/k) = y(k+1) - \underline{m}^T(k+1)\hat{\underline{p}}(k) . \quad (2.2.73)$$

In dieser rekursiven Form verlangt die Bildung der Gewichtungsmatrix $\underline{P}(k+1)$ nach Gl. (2.2.64) keine Matrizeninversion mehr. Der zu invertierende Ausdruck $f(k+1)$ ist eine einfach zu bildende skalare Größe. Die Schätzgleichung (2.2.71) läßt sich gemäß Bild 2.2.2 deuten als

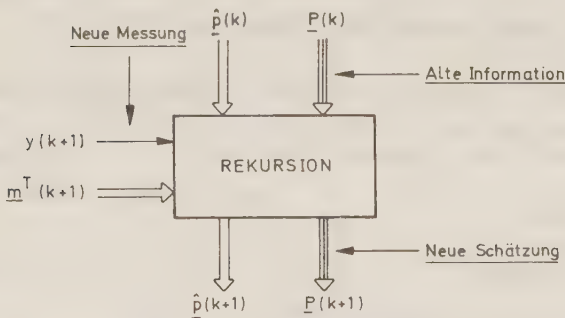


Bild 2.2.2: Schema der rekursiven Regressionsmethode

Neue Schätzung = Alte Schätzung + Korrektur

$$\hat{\underline{p}}(k+1) = \hat{\underline{p}}(k) + \Delta \hat{\underline{p}}(k+1) . \quad (2.2.74)$$

Die Korrektur $\Delta \hat{\underline{p}}(k+1)$ wird aufgrund der alten Information und der neuen Messung vorgenommen, hat also Prädiktionscharakter, wie in Gl. (2.2.73) angedeutet. Die alte Information steckt vollständig

im Parametervektor $\hat{\underline{p}}(k)$ und der Gewichtsmatrix $\underline{P}(k)$, die laufend abgespeichert werden müssen.

Der rekursive Algorithmus in der bisher vorliegenden Form ist ein rein deterministisches Verfahren und daher identisch mit der expliziten Schätzgleichung (2.2.24). Es liefert demnach auch Ergebnisse für den ungestörten Fall.

Für den stochastischen Fall kann nach Gl. (2.2.53) die Gewichtsmatrix $\underline{P}$ durch die Kovarianzmatrix $\underline{P}^*$ des Schätzfehlers und die Varianz σ_e^2 des Fehlers $e(k)$ ausgedrückt werden:

$$\underline{P}^*(k+1) = \sigma_e^2 \underline{P}(k+1) \quad . \quad (2.2.53)$$

Ersetzt man $\underline{P}$ durch $\underline{P}^*/\sigma_e^2$ in den Schätzgleichungen, erhält man schließlich die allgemeine Form der rekursiven Regressionsanalyse:

Parameteralgorithmus:

$$\hat{\underline{p}}(k+1) = \hat{\underline{p}}(k) + \underline{K}(k+1) [y(k+1) - y(k+1/k)] \quad . \quad (2.2.75)$$

Fehler-Kovarianzalgorithmus:

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{P}^*(k) - \underline{K}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}^*(k) \quad . \quad (2.2.76)$$

Verstärkungs-Algorithmus:

$$\underline{K}(k+1) = \gamma(k+1) \underline{P}^*(k) \underline{m}(k+1) \quad (2.2.77)$$

$$\text{mit } \gamma(k+1) = [\sigma_e^2 + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}^*(k) \underline{m}(k+1)]^{-1} \quad . \quad (2.2.78)$$

Prädiktions-Algorithmus:

$$y(k+1/k) = \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k) \quad . \quad (2.2.79)$$

2.2.3 Eigenschaften von expliziter und rekursiver Schätzung.

Den Vorteilen der expliziten Parameterschätzung nach Gl. (2.2.24), nämlich prinzipiell

1. Schätzwerte zu beliebigen Zeitpunkten ohne Informationsverlust zu liefern und
2. keine Anfangsschätzungen zu benötigen,

stehen erhebliche Nachteile hinsichtlich der Realisierung am Prozeßrechner gegenüber. Zu berücksichtigen sind dabei:

1. hoher Speicherbedarf durch die Abspeicherung vieler Meßwerte in der $(N \times 2n)$ -Matrix $\underline{M}$ bei $N \gg 2n$, vor allem bei stark verdrahteten Prozessen,
2. große Rechenzeiten durch Matrizenoperationen hoher Ordnung,
3. numerische Instabilität durch die Inversion der $(2n \times 2n)$ -Matrix $(\underline{M}^T \underline{M})$, die oft schlecht konditioniert ist.

Aus dieser Gegenüberstellung wird deutlich, daß man das explizite Verfahren weniger zur on-line-Schätzung einsetzt als vielmehr für gelegentliche Schätzungen aufgrund vieler Meßdaten. In diesem Fall kann das explizite Schätzergebnis keine Aussage darüber liefern, ob diese Schätzung im Mittel bereits einen stationären Zustand beschreibt, man erhält also keine Information über die Anzahl der benötigten Meßwerte.

Das rekursive Verfahren umgeht diese Nachteile, da es laufende Schätzungen unter Verwendung nur der jeweils neuesten Messung

liefert. Die alte Information steckt vollständig im zuletzt bestimmten Parametervektor und in der $(2n \times 2n)$ -Gewichtsmatrix $\underline{P}$. Die rekursive Methode zeichnet sich daher aus durch

1. geringeren Speicherbedarf;
2. geringere Rechenzeiten, da keine aufwendigen Matrizenoperationen, insbesondere keine Matrizeninversionen, durchzuführen sind;
3. eine Aussage über den stationären Zustand der Schätzung.

Diese von der numerischen Seite her sehr günstigen Eigenschaften werden allerdings von prinzipiellen Schwächen der rekursiven Verfahren ergänzt :

1. Man kann Schätzergebnisse nicht zu beliebigen Zeitpunkten anfordern, ohne einen Informationsverlust hinnehmen zu müssen, sondern muß den Schätzalgorithmus im Takte der neu anfallenden Meßdaten durchführen.
2. Um den rekursiven Algorithmus starten zu können, muß eine Anfangsschätzung für die Parameter $\hat{\underline{p}}(0)$ und die Gewichtsmatrix $\underline{P}(0)$ festgelegt werden. Die Konvergenz des Verfahrens, mithin Einschwingverhalten und Stabilität, hängt aber entscheidend von der Wahl dieser Anfangswerte ab, wie im weiteren gezeigt wird. Häufig existiert nur ein sehr enger Konvergenzbereich für diese Startwerte, wobei eine erhebliche Abhängigkeit vom Prozeß selbst und den Störungen vorhanden ist.

3. Für schnelle Konvergenz wird verlangt, daß $\underline{p}(o)$ "möglichst" groß gewählt wird. Der Einschwingvorgang zeichnet sich dann durch sehr große Zahlenwerte aus, die vom Rechner verarbeitet werden müssen. Zahlen in der Größenordnung von 10^{10} und darüber, wie sie durchaus auftreten, können von üblichen 16-bit- oder gar den kleinen 12- bzw. 8-bit-Rechnern schon nicht mehr verarbeitet werden. Diese Begrenzungen sind aus regelungstechnischer Sicht als nichtlineare Elemente zu betrachten und können leicht zur Instabilität des Verfahrens führen.

Aufgrund der Schwierigkeiten, die sich mit der Wahl der Anfangswerte $\hat{\underline{p}}(o)$ und $\underline{p}(o)$ ergeben, muß ein problemloser Einsatz dieser rekursiven Verfahren in der Praxis sehr in Frage gestellt werden. Zur Wahl dieser Startwerte gibt es im allgemeinen Fall, ohne Vorkenntnisse über die tatsächlichen Systemparameter bzw. deren Varianzen, zwei Möglichkeiten:

Einmal läßt durch Anwenden der expliziten Schätzgleichung nach $L \geq 2n$ Messungen ein geeigneter Übergang zur rekursiven Form finden:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{p}}_{\text{Rek}}(o) &= \hat{\underline{p}}_{\text{Exp}}(L) \\ \underline{p}_{\text{Rek}}(o) &= \underline{p}_{\text{Exp}}(L) = \left[\underline{M}^T(L) \underline{M}(L) \right]^{-1}.\end{aligned}\tag{2.2.80}$$

Dies ist natürlich ein sehr aufwendiges Vorgehen, da sowohl explizites als auch rekursives Verfahren zugriffsbereit sein müssen. Günstiger ist es daher, die Startwerte als feste Größen vorzugeben. Bei unbekannten Parametern und Varianzen wählt man zweckmäßigerweise

$$\hat{\underline{p}}(o) = \underline{0}\tag{2.2.81}$$

Die skalare Größe α nimmt dabei die Bedeutung einer Anfangsstreuung des Schätzfehlers an. Nach Gl. (2.2.61) ist

$$\underline{P}(k+1)^{-1} = \underline{P}(k)^{-1} + \underline{m}(k+1)\underline{m}^T(k+1) \quad (2.2.61)$$

Dann wird für die erste Schätzung:

$$\underline{P}^{-1}(1) = \underline{P}^{-1}(0) + \underline{m}(1)\underline{m}^T(1) \quad (2.2.82)$$

$$\hat{\underline{p}}(1) = \underline{P}(1)[\underline{m}(1)\underline{y}(1) + \underline{P}^{-1}(0)\hat{\underline{p}}(0)] \quad .$$

Durch sukzessives Einsetzen ergibt sich nach L Messungen /1/:

$$\underline{P}^{-1}(L) = \underline{P}^{-1}(0) + \underline{M}^T(L)\underline{M}(L) \quad (2.2.83)$$

$$\hat{\underline{p}}(L) = \underline{P}(L)[\underline{M}^T(L)\underline{y}(L) + \underline{P}^{-1}(0)\hat{\underline{p}}(0)] \quad .$$

Für $\underline{P}^{-1}(0) \rightarrow \underline{0}$ erhalten wir die expliziten Schätzgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \underline{P}^{-1}(L) &\rightarrow \underline{M}^T(L)\underline{M}(L) \\ \hat{\underline{p}}(L) &\rightarrow \underline{P}(L)\underline{M}^T(L)\underline{y}(L) \end{aligned} \right\} \text{ für } \underline{P}^{-1}(0) \rightarrow \underline{0} \quad (2.2.84)$$

Nach Gl. (2.2.84) ist $\underline{P}(0)$ möglichst groß zu wählen, um rasche Konvergenz zu erzielen. Für ein ungestörtes, dynamisches System mit der Ordnung n sind dazu mindestens $2n+1$ Meßdaten $\{u(k), y(k)\}$ erforderlich. In / 19 / wird gezeigt, daß im ungestörten Fall die Konvergenz der Schätzung dann unabhängig vom Startwert $\hat{\underline{p}}(0)$ ist, wenn

$$\underline{P}(0) = \alpha \underline{I} \quad , \quad \alpha \geq 10^{15} \quad (2.2.85)$$

gewählt wird.

Die Konvergenzeigenschaften lassen sich darüber hinaus anhand regelungstechnischer Gesichtspunkte verdeutlichen /13/. Die rekursive Schätzgleichung (2.2.71) läßt sich als "Regelkreis" auffassen mit dem Korrekturterm $\Delta \hat{p}(k+1)$ als Regelgröße und dem Sollwert $\Delta p_s = 0$:

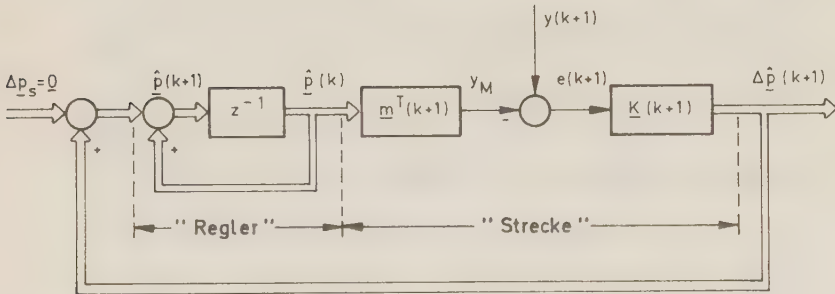


Bild 2.2.3: Rekursive Schätzung als Regelkreis

Als Regler kann gemäß Bild 2.2.3 die z-Übertragungsfunktion

$$\frac{\hat{p}(k)}{\Delta \hat{p}(k+1)} = \frac{z^{-1}}{1-z} \quad (2.2.86)$$

bestimmt werden, die ein integrales Verhalten beschreibt. Die Regelstrecke besteht dann aus dem Meßvektor $\underline{m}^T(k+1)$ und dem Bewertungsterm $\underline{K}(k+1)$, die beide in Abhängigkeit der anfallenden Meßwerte zeitvariantes Verhalten zeigen.

Der zur Korrekturbewertung benutzte Verstärkungsvektor $\underline{K}(k+1)$ läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$\underline{K}(k+1) = \Upsilon(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) = \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) [\underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) + 1]^{-1} \quad (2.2.87)$$

Durch wiederholtes Anschreiben dieser Gleichung für $\underline{P}(k)$, $\underline{P}(k-1), \dots, \underline{P}(1), \underline{P}(0)$ erhält man schließlich:

$$\underline{K}(k+1) = \underline{P}(0) \underline{m}(k+1) [(\underline{m}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(0) \underline{m}(k+1) + 1)^{-1}]. \quad (2.2.88)$$

Im Grenzübergang für $k \rightarrow \infty$ wird

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{K}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \underline{P}(0) \underline{m}(k+1) [\underline{m}^T(k+1) \underline{P}(0) \underline{m}(k+1)]^{-1}. \quad (2.2.89)$$

Mit $\underline{P}(0) = \alpha \underline{I}$ folgt weiter:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{K}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \underline{m}(k+1) [\underline{m}^T(k+1) \underline{m}(k+1)]^{-1}. \quad (2.2.90)$$

Mit Gl. (2.2.87) gilt auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{P}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} [\underline{m}^T(k+1) \underline{m}(k+1)]^{-1} \underline{I}. \quad (2.2.91)$$

Man erkennt, daß für große Werte k der Vektor $\underline{K}(k+1)$ und $\underline{P}(k+1)$ proportional zu $1/(k+1)$ und unabhängig von den Werten α der Startmatrix $\underline{P}(0)$ sind.

Weiterhin wird aus Gl. (2.2.90) deutlich, daß die Gewichtung $\underline{K}(k+1)$ in erster Näherung als Serienkompensation des zweiten Streckentermes $\underline{m}^T(k+1)$ angesehen werden kann und zusätzlich eine zeitvariante Streckenverstärkung $V(k+1)$ enthält, die anfänglich durch α bestimmt, für große Werte k dagegen durch $1/(k+1)$ festgelegt wird. Diese Serienkompensation hat zur Folge, daß die offene Übertragungskette durch den I-Anteil des Reglers verkörpert wird. Damit kann durch entsprechende Wahl der Anfangsverstärkung α das Einschwingverhalten des rekursiven Schätzverfahrens im ungestörten Fall beliebig schnell gemacht werden. Auch in Anwesenheit von Systemstörungen ist die

Rekursion prinzipiell stabil, sofern das Fehlersignal $e(k+1)$ sich wie weißes Rauschen verhält (statisches System). Bei dynamischen Systemen ist diese Voraussetzung infolge der Definition von $e(k+1)$ als Gleichungsfehler nicht erfüllt. Das Signal $e(k+1)$ ergibt sich aus der Systemstörung $r(k+1)$ über ein definiertes Rauschfilter, das der Regelstrecke zuzuordnen ist. Demnach sind Übertragungsglieder zu berücksichtigen, die durch die Serienkompensation nicht erfaßt werden. Physikalisch gesehen handelt es sich hier um nichtkompensierbare Zeitkonstanten, die die mögliche Streckenverstärkung nach großen Werten hin begrenzen. Wird dann α zu groß gewählt, zeigt sich ein instabiles Schätzverfahren; bei zu kleinen Werten von α konvergiert das rekursive Verfahren zu langsam.

2.2.4 Pseudorekursives Schätzverfahren.

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die Eigenschaften von expliziter und rekursiver Least-squares-Schätzung gegenübergestellt. Zwar sind beide Verfahren prinzipiell identisch, da sich die Schätzgleichungen ineinander überführen lassen, aber es wurde deutlich, daß beide Verfahren unterschiedliche systematische oder numerische Probleme aufwerfen. Wir suchen daher nach einem Verfahren, das die nachteiligen Eigenschaften von expliziter und rekursiver Schätzung umgeht, gleichzeitig aber mit deren Vorteilen ausgestattet ist. Ein solches Verfahren existiert und beruht auf dem Prinzip der orthogonalen Transformation. Im Prinzip handelt es sich hierbei um ein explizites Verfahren, es hat aber die günstigen Eigenschaften des Rekursionsalgorithmus und soll deswegen als pseudorekursiv bezeichnet werden. Die aufwendige Speicherung sämtlicher Meßwerte in der Matrix $\underline{M}$ der expliziten Methode wird hier durch eine geeignete

Transformation umgangen, die zu einer Reduktion der Meßdaten führt. Während andererseits beim rekursiven Verfahren der Parametervektor $\hat{\underline{p}}$ und die Gewichtsmatrix $\underline{P}$ rekursiv gebildet werden, erstreckt sich beim pseudorekursiven Verfahren das entsprechende rekursive Bildungsgesetz nur auf die reduzierte Datenmatrix.

Ausgangspunkt des pseudorekursiven Verfahrens ist die Meßwertgleichung entsprechend Gl. (2.2.15)

$$\underline{y} - \underline{M}\hat{\underline{p}} = \underline{e} \quad (2.2.92)$$

Bezeichnet nun allgemein $\|\underline{x}\| = (\underline{x}^T \underline{x})^{1/2}$ die in Kapitel 2.4 eingeführte euklidische Norm des Vektors $\underline{x}$, dann läßt sich das lineare Ausgleichsproblem (LS-Problem) als Vorschrift deuten, das Funktional

$$\|\underline{y} - \underline{M}\underline{p}\| = \|\underline{e}\| \quad (2.2.93)$$

zu minimieren. Dies wird bei dem expliziten Schätzverfahren über die sogenannten Normalgleichungen

$$\underline{M}^T \underline{M} \hat{\underline{p}} = \underline{M}^T \underline{y} \quad (2.2.94)$$

erreicht, die der expliziten Schätzgleichung (2.2.24) entsprechen und durch formales "Symmetrisieren" von Gl. (2.2.92) und Nullsetzen von $\underline{M}^T \underline{e}$ entstehen. Beim pseudorekursiven Verfahren wird die Minimierung von $\|\underline{y} - \underline{M}\underline{p}\|$ dagegen mit Hilfe einer Orthogonalisierungsstrategie durchgeführt /20/. Dazu wird die $(N \times 2n)$ -Meßwertmatrix $\underline{M} = \underline{M}^{(0)}$ durch eine Folge von geeigneten (Householder- oder Givens-) Transformationen $\underline{T}_i$ in die Matrix $\underline{T} \underline{M} = \underline{M}^{(q)}$ transformiert, wenn mit $\underline{T}$ das Produkt der Matrizen $\underline{T}_i$ und die Zahl der unbekannten Parameter mit $q = 2n$ bezeichnet werden:

$$\underline{T} = \prod_{i=1}^q \underline{T}_i \quad (2.2.95)$$

$$\text{mit} \quad q = 2n \quad . \quad (2.2.96)$$

Für die einzelnen Transformationen gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \underline{M}^{(i)} &= \underline{T}_i \underline{M}^{(i-1)} \\ \underline{Y}^{(i)} &= \underline{T}_i \underline{Y}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (2.2.97)$$

und schließlich wird mit $N \geq q = 2n$, wenn wir für die derart transformierten Größen das *-Symbol einführen:

$$\underline{T}_{[NxN]} \underline{M}_{[Nxq]} = \underline{M}_{[Nxq]}^{(q)} = \begin{bmatrix} \underline{M}^*_{[qxq]} \\ \hline 0_{[(N-q)xq]} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.2.98)$$

$\underline{M}^*$ ist dabei eine obere Dreiecksmatrix:

$$\underline{M}^* = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* & \dots & m_{1q}^* \\ & m_{22}^* & \dots & m_{2q}^* \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_{qq}^* \end{bmatrix} \quad . \quad (2.2.99)$$

Die entsprechend transformierte rechte Seite $\underline{y}$ wird analog aufgeteilt:

$$\underline{T}_{[NxN]} \underline{Y}_{[Nx1]} = \underline{Y}_{[Nx1]}^{(q)} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1^*_{[qx1]} \\ \hline \underline{Y}_2^*_{[(N-q)x1]} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.2.100)$$

Mit Gleichung (2.2.98) erhalten wir das wesentliche Ergebnis, daß die orthogonal transformierte Matrix $\underline{M}^*$ unabhängig von der Größe des Meßintervalls N stets eine obere Dreiecksmatrix der Ordnung $q = 2n$ ist. Die Transformationsmatrix $\underline{T}$ ist als Produkt orthogonaler Matrizen wieder orthogonal, d.h.

$$\underline{T}^T \underline{T} = \underline{T}_1^T \underline{T}_2^T \dots \underline{T}_q^T \underline{T}_q \dots \underline{T}_1 = \underline{I} . \quad (2.2.101)$$

Berücksichtigt man weiter, daß eine orthogonale Transformation die Länge $\|\underline{x}\|$ eines Vektors $\underline{x}$ invariant läßt, da aus Gl. (2.2.101)

$$\|\underline{T} \underline{x}\| = (\underline{x}^T \underline{T}^T \underline{T} \underline{x})^{1/2} = \|\underline{x}\| \quad (2.2.102)$$

folgt, dann gilt für den Fehlervektor $\underline{e}$:

$$\|\underline{e}\| = \|\underline{Y} - \underline{M} \underline{p}\| = \|\underline{T}(\underline{Y} - \underline{M} \underline{p})\| = \|\underline{Y}^{(q)} - \underline{M}^{(q)} \underline{p}\| . \quad (2.2.103)$$

Nach einer Orthogonaltransformation mit der Matrix $\underline{T}$ bleibt demnach auch die Summe der Fehlerquadrate

$$Q = \|\underline{e}\|^2 = \underline{e}^T \underline{e} \quad (2.2.104)$$

unverändert.

Nach Gl. (2.2.98) und Gl. (2.2.100) ist auch

$$\underline{Y}^{(q)} - \underline{M}^{(q)} \underline{p} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1^* - \underline{M}^* \underline{p} \\ \underline{Y}_2^* \end{bmatrix} . \quad (2.2.105)$$

Die Länge $\|\underline{Y} - \underline{M} \underline{p}\|$ wird demnach minimal, wenn $\underline{p}$ so gewählt wird, daß gilt:

$$\underline{Y}_1^* = \underline{M}^* \underline{p} \Big|_{\underline{p}=\hat{\underline{p}}} . \quad (2.2.106)$$

Sind die Spalten von $\underline{M}$ linear unabhängig, wie es vorausgesetzt wird, dann läßt sich die pseudorekursive Schätzgleichung

$\underline{Y}_1^* = \underline{M}^* \hat{\underline{p}}$

(2.2.107)

eindeutig nach $\hat{p}$ auflösen. Mit Gl. (2.2.106) und der Definition:

$$\underline{y}_1^* = [y_{11}^* \ y_{12}^* \ \dots \ y_{1q}^*]^T \quad (2.2.108)$$

werden die unbekannten Parameter dann in absteigender Reihenfolge wie folgt bestimmt:

$$\hat{p}_q = y_{1,q}^* / m_{q,q}^*$$

$$\hat{p}_{q-1} = \frac{1}{m_{q-1,q-1}^*} (y_{1,q-1}^* + \hat{p}_q m_{q-1,q}^*)$$

·
·
·

$$\hat{p}_{q-k} = \frac{1}{m_{q-k,q-k}^*} (y_{1,q-k}^* + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{p}_{q-i} m_{q-k,q-i}^*)$$

·
·
·

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{m_{1,1}^*} (y_{1,1}^* + \sum_{i=0}^q \hat{p}_{q-i} m_{1,q-i}^*) \quad (2.2.109)$$

Für den Fehler $\|\underline{y} - \underline{M}\underline{p}\| = \|\underline{e}\|$ erhält man aus Gl. (2.2.105) sofort:

$$\|\underline{y} - \underline{M}\underline{p}\| = \|\underline{y}_2^*\| \quad (2.2.110)$$

Für die rekursive Meßwertverarbeitung nehmen wir an, daß zum Zeitpunkt $k \cdot T_0$ bereits orthogonal transformierte Größen $\underline{M}^*(k)$, $\underline{y}^*(k)$ vorliegen mögen. Dann gilt zum Zeitpunkt $(k+1)T_0$:

$$\underline{T}(k+1) \begin{bmatrix} \underline{M}^*(k) \\ \underline{M}^T(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M}^*(k+1) \\ \underline{0}^T \end{bmatrix} \quad (2.2.111)$$

$$\underline{T}(k+1) \begin{bmatrix} \underline{y}^*(k) \\ \underline{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1^*(k+1) \\ \underline{y}_2^*(k+1) \end{bmatrix} \quad (2.2.112)$$

und für die Fehlerquadratsumme:

$$\|\underline{e}\|^2 = \underline{e}^T \underline{e} = [\underline{y}_2^* (k+1)]^2 . \quad (2.2.113)$$

Da die Orthogonaltransformation für eine beliebige Anzahl N von Meßreihen durchführbar ist, die Rekursionsgleichungen (2.2.111) und (2.2.112) andererseits Startwerte $\underline{M}^*(0)$ und $\underline{y}_1^*(0)$ benötigen, ist ein hinsichtlich der Konvergenz völlig problemloser Anlauf dieses pseudorekursiven Verfahrens mit der Startmatrix:

$$\underline{Z}^*(0) = [\underline{M}^*(0) \mid -\underline{y}_1^*(0)] = \underline{0} \quad (2.2.114)$$

möglich.

An dieser sehr einfachen Wahl der Startwerte wird ein wesentlicher Vorteil gegenüber dem rekursiven Verfahren deutlich, dessen Konvergenz sehr stark von den benötigten Startwerten

$$\hat{\underline{p}}(0) = \underline{0} \quad (2.2.85)$$

$$\underline{p}(0) = \alpha \underline{I} ,$$

von einer geeigneten Wahl des Parameters α abhängt.

Es ist nun noch zu fragen, wie die einzelnen Transformationsmatrizen beschaffen sein müssen, damit einerseits die Orthogonalitätsbeziehung (2.2.101) erfüllt wird, andererseits die gewünschte Dreiecksform von $\underline{M}^*$ nach Gl. (2.2.99) erzeugt wird bzw. nach jeder Rekursion (Datenreduktion) erhalten bleibt. Transformationsmatrizen mit diesen Eigenschaften sind die im Prinzip gleichwertigen, sogenannten Givens- und Householdermatrizen /10/, /21/, /22/, /23/, /24/. Im Prinzip wird dabei zunächst ein gegebener n -dimensionaler Vektor $\underline{z}$ auf ein Vielfaches einer Spalte der Einheitsmatrix reduziert. Es muß dann

eine $(n \times n)$ -Orthogonalmatrix $\underline{T}$ gefunden werden, so daß z.B. für den 1. Achsenvektor gilt:

$$\underline{T} \underline{z}_1 = \pm \rho \underline{e}_1 \quad (2.2.115)$$

Diese Transformation kann durch eine Folge von Givens-Matrizen, die ebene Drehungen beschreiben, oder durch eine einzige hermitesche Householder-Matrix erreicht werden, die eine Drehung und zusätzlich eine Spiegelung beschreibt.

Als Givens-Matrix bezeichnet man die symmetrische Form /25/:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \quad (2.2.116)$$

mit $c^2 + s^2 = 1, \quad \det(\underline{G}) = -1$

und $\underline{G}^T \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{I} \quad (2.2.117)$

Dann ist:

$$\underline{G} \underline{z} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \end{bmatrix} = \rho \underline{e}_1 \quad (2.2.118)$$

Die Givens-Transformation wird dann beschrieben durch:

$$\rho^2 = z_1^2 + z_2^2$$

oder $\rho = \text{sign}(z_1) |\rho| \quad (2.2.119)$

$$c = z_1 / \rho; \quad s = z_2 / \rho$$

Um die Transformation nach Gl. (2.2.115) durchführen zu können, muß die Matrix $\underline{G}$ in die n-dimensionale Einheitsmatrix eingeschlossen werden:

$$\underline{I}_{ij} \underline{z} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & s & \\ & & & \ddots & & \\ & & s & & -c & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_i \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (2.2.120)$$

Die Matrix $\underline{T}_{ij}^1$ bezeichnet einen Operator, der das Element z_j eines Vektors $\underline{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ zu Null reduziert, indem er eine Linearkombination dieses Elementes mit z_i bildet. Alle übrigen Elemente $z_k, k \neq i, j$ bleiben dabei unverändert. Um $\underline{z}$ auf $\rho \underline{e}_1$ zu transformieren, kann dann die Folge von Givens-Matrizen

$$\underline{T}_1 = \underline{T}_2^1 \underline{T}_3^2 \dots \underline{T}_{n-1}^{n-2} \underline{T}_n^{n-1} \quad (2.2.121)$$

benutzt werden.

Die gleiche Reduktion kann in einem Schritt durch folgende Householder-Matrix erreicht werden /25/, /20/:

$$\underline{T}_1 = \underline{I} + \beta^{-1} \underline{u} \underline{u}^T \quad (2.2.122)$$

mit

$$\underline{u} = \underline{z} + \rho \underline{e}_1$$

$$\underline{B} = -\rho \underline{u}_1$$

$$\rho = \text{sign}(\underline{z}_1) \|\underline{z}\| \quad (2.2.123)$$

Damit ist $\underline{T}_1$ so beschaffen, daß gilt:

$$\underline{T}_1 \underline{z} = -\rho \underline{e}_1 \quad (2.2.124)$$

Im 2-dimensionalen Fall läßt sich zeigen, daß die Householder-Matrix folgende Form annimmt:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -c & -s \\ -s & c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} = -\underline{G} \quad (2.2.125)$$

Householder- und Givens-Matrix unterscheiden sich hierbei lediglich durch das Vorzeichen. Dennoch bestehen Unterschiede im Aufbau der Transformationsstufen. Dies hat zur Folge, daß für die Transformation jeweils nur einer Matrixzeile das Givens-Verfahren die geringere Rechenzeit benötigt. Dies entspricht dem Fall, daß nach jeder Messung eine Parameterschätzung erfolgt, wie hier angenommen werden soll. Die Householder-Reduktion ist dann vorteilhaft, wenn mehrere Matrixzeilen gleichzeitig reduziert werden sollen, also für den Fall, daß nur nach einer bestimmten Anzahl von Messungen geschätzt werden soll oder zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Aus Gl. (2.2.104) ist ersichtlich, daß bei jeder Rekursion der neue Meßwertvektor $\underline{m}^T(k+1)$ zu $\underline{c}^T$ reduziert werden muß, d.h. die in $\underline{m}^T(k+1)$ enthaltene neue Information muß vollständig nach $\underline{M}^*(k+1)$ transformiert werden. Zur Reduktion faßt man zweckmäßigerweise Gl. (2.2.111) und Gl. (2.2.112) zusammen.

$$\underline{T}(k+1) \left[\begin{array}{c|c} \underline{M}^*(k) & -\underline{Y}^*(k) \\ \hline \underline{m}^T(k+1) & -y(k+1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{M}^*(k+1) & -\underline{Y}_1^*(k+1) \\ \hline \underline{0}^T & -y_2^*(k+1) \end{array} \right] = \underline{Z}^*(k+1) \quad (2.2.126)$$

mit der Abkürzung:

$$\underline{Z}^* = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} z_{1,1}^* & z_{1,2}^* \cdots z_{1,q+1}^* \\ & z_{2,2}^* \cdots z_{2,q+1}^* \\ & & \ddots \\ \underline{0} & & & z_{q+1,q+1}^* \end{matrix} & \begin{matrix} -y_{1,1}^* \\ -y_{1,2}^* \\ \vdots \\ -y_{1,q}^* \\ -y_2^* \end{matrix} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} m_{1,1}^* & m_{1,1}^* \cdots m_{1,q}^* \\ & m_{2,2}^* \cdots m_{2,q}^* \\ & & \ddots \\ \underline{0} & & & m_{q,q}^* \end{matrix} & \begin{matrix} -y_{1,1}^* \\ -y_{1,2}^* \\ \vdots \\ -y_{1,q}^* \\ -y_2^* \end{matrix} \end{array} \right] \quad (2.2.127)$$

Beim Givens-Verfahren werden durch die Transformationen mit den Givens-Matrizen $\underline{T}_j^i$ gemäß Gl. (2.2.120) lediglich die i-ten und j-ten Zeilen in $\underline{Z}^*(k)$ geändert, die restlichen Zeilen bleiben unverändert. Im einzelnen gilt /22/, /23/:

$$\text{Für } l \neq i, l \neq j: \quad z_{lv}^* = z_{lv} \quad v = 1, 2, \dots, q+1$$

$$\text{für } l = i: \quad z_{iv}^* = c z_{iv} + s z_{jv} \quad v = 1, 2, \dots, q+1 \quad (2.2.128)$$

$$\text{für } l = j: \quad z_{jv}^* = -s z_{iv} + c z_{jv} \quad v = 1, 2, \dots, q+1,$$

$$\text{wobei } z_{i,j} \in \underline{Z}^*(k) \text{ und } z_{i,j}^* \in \underline{Z}^*(k+1). \quad (2.2.129)$$

Ordnen wir die neue Information im Zeilenvektor $\underline{z}^T$ an, mit

$$\underline{z}^T(k+1) = \left[\underline{m}^T(k+1) \mid -y(k+1) \right], \quad (2.2.130)$$

und fügen wir diesen Vektor als (q+2)-te Zeile in $\underline{Z}^*(k)$ ein, dann

muß nach der Reduktion von $\underline{z}^T(k+1)$ gelten:

$$z_{q+2,1}^*(k+1) = 0 \quad \text{für } l = 1, 2, \dots, q \quad . \quad (2.2.131)$$

Es werden dann nur die Matrizen $\underline{T}_{q+2}^1$ ($l = 1, 2, \dots, q$) verwandt, d.h. für jedes l ändert sich nach einer Transformation die l -te Zeile und der Vektor $\underline{z}^T(k+1)$ in der $(q+2)$ -ten Zeile von $\underline{Z}^*(k)$.

Mit Gl. (2.2.128) folgt weiter bei $v = 1$:

$$z_{q+2,1}^* = -s \, z_{1,1} + c \, z_{q+2,1} = 0 \quad . \quad (2.2.132)$$

Über die Bedingung (2.2.117)

$$c^2 + s^2 = 1 \quad (2.2.133)$$

wird schließlich:

$$c_1 = \frac{z_{1,1}}{\sqrt{z_{q+2,1}^2 + z_{1,1}^2}} \quad s_1 = \frac{z_{q+2,1}}{\sqrt{z_{q+2,1}^2 + z_{1,1}^2}} \quad (2.2.134)$$

für $l = 1, 2, \dots, q+1$.

Die transformierten Elemente der l -ten und $(q+2)$ -ten Zeile sind dann:

$$z_{1,v}^* = c_1 \, z_{1,v} + s_1 \, z_{q+2,v}$$

$$z_{q+2,v}^* = c_1 \, z_{q+2,v} - s_1 \, z_{1,v}$$

$$\text{für } v = 1, 2, \dots, q+1 \quad . \quad (2.2.135)$$

Das Householder-Verfahren reduziert einen beliebigen m -dimensionalen Vektor nicht durch eine Folge von Transformationsschritten, sondern in einem Schritt. Eine $(m \times m)$ -Householder-Matrix hat dabei die Form

$$\underline{T}_j = \underline{I} + \underline{B}^{-1} \underline{u} \underline{u}^T, \quad (2.2.136)$$

wobei $\underline{u}$ ein m -Vektor ist, der die Bedingungen erfüllt /26/:

$$\|\underline{u}\| \neq 0$$

$$\underline{B} = -\|\underline{u}\|^2/2. \quad (2.2.137)$$

Durch einfaches Verifizieren wird deutlich, daß Gl. (2.2.136) mit der Wahl von $\underline{B}$ nach Gl. (2.2.137) die Orthogonalitätsbedingung $\underline{T}_j^T \underline{T}_j = \underline{I}$ erfüllt. Um die Konstruktion dieser orthonormalen Transformation eines m -dimensionalen Spaltenvektors $\underline{w}$ zu zeigen, wird $\underline{w}$ geeignet segmentiert. Es sei

$$\begin{aligned} \underline{w} &= [\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_1 \mid \underline{w}_{1+1} \mid \underline{w}_{1+2}, \dots, \underline{w}_{1+t+1} \mid \underline{w}_{1+t+2}, \dots, \underline{w}_m]^T \\ &= [\underline{w}_1^T, \underline{w}_{1+1}^T, \underline{w}_2^T, \underline{w}_3^T]^T \end{aligned} \quad (2.2.138)$$

$$\text{mit } \underline{w}_1^T = [\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_1]$$

$$\underline{w}_2^T = [\underline{w}_{1+2}, \dots, \underline{w}_{1+t+1}]$$

$$\underline{w}_3^T = [\underline{w}_{1+t+2}, \dots, \underline{w}_m]. \quad (2.2.139)$$

Der transformierte Vektor $\underline{w}^* = \underline{T} \underline{w}$ soll folgende Gestalt haben:

$$\underline{w}^* = [\underline{w}_1^T, \underline{w}_{1+1}^*, \underline{w}_2^T, \underline{0}]^T. \quad (2.2.140)$$

Demnach sollen die Vektoren $\underline{w}_1^T$ und $\underline{w}_2^T$ unverändert bleiben, der Vektor $\underline{w}_3$ soll $\underline{0}$ werden, wobei das Element $\underline{w}_{1+1}$ verändert wird. Dies erfordert nach Gl. (2.2.136) die Bestimmung eines Vektors $\underline{u}$:

$$\underline{u} = [\underline{u}_1^T, \underline{u}_{1+1}, \underline{u}_2^T, \underline{u}_3^T]^T,$$

der über folgenden Gleichungssatz gewonnen wird:

$$\begin{aligned}\sigma_u &= -\operatorname{sgn}(\underline{w}_{i+1})(\underline{w}_{i+1}^2 + \|\underline{w}_3\|^2)^{1/2} \\ \underline{u}_{i+1}^* &= \underline{w}_{i+1} - \sigma_u \\ \beta &= \sigma_u \underline{u}_{i+1}^* \\ \underline{u}_1 &= \underline{0} \\ \underline{u}_2 &= \underline{0} \\ \underline{u}_3 &= \underline{w}_3 \quad .\end{aligned}\tag{2.2.141}$$

Dann ist $\underline{T}_j$ nach Gl. (2.2.136) orthonormal und erfüllt die Bedingung:

$$\underline{T}_j^T \underline{w} = \begin{cases} \underline{w} + [(\underline{u}^T \underline{w})/\beta] \underline{u} & \text{für } \beta \neq 0 \\ \underline{w} & \text{für } \beta = 0 \end{cases}\tag{2.2.142}$$

$$= [\underline{w}_1^T, \sigma_u, \underline{w}_2^T, \underline{0}^T]^T.\tag{2.2.143}$$

In dieser allgemeinen Form entspricht der Vektor $\underline{w}$ nach Gl. (2.2.126) der (i+1)-ten Spalte aus der um die neue Information erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{M}^*(k) & -\underline{Y}^*(k) \\ \hline \underline{M}^T(k+1) & -\underline{Y}(k+1) \end{array} \right] = \underline{Z}_{\underline{M}}^*(k+1) \quad ,\tag{2.2.144}$$

wobei der Vektor $\underline{w}_3$ zur skalaren Größe wird, da sich die Reduktion jeweils nur auf eine Zeile erstreckt. Die Bildung von σ_u in Gleichung (2.2.141) zeigt aber auch den geringen Mehraufwand zur Reduktion einer größeren Matrix.

Nach Gl. (2.2.126) gilt:

$$\underline{T}(k+1) \underline{Z}_E^*(k+1) = \underline{Z}^*(k+1) \quad . \quad (2.2.145)$$

Demnach muß nach jeder Spaltenreduktion eine Multiplikation von $\underline{T}_j$ mit den noch nicht reduzierten Spalten in $\underline{Z}_E^*$ durchgeführt werden gemäß:

$$\underline{T} \underline{c} = \underline{c} + [(\underline{u}^T \underline{c}) / \beta] \underline{u} \quad . \quad (2.2.146)$$

Die entsprechenden FORTRAN-IV-Programme des Givens- und Householder-Verfahrens sind im Anhang A4 aufgelistet.

2.3 Hilfsvariablenverfahren

Infolge des Modellansatzes in Zeitreihenform und der notwendigen Definition des Schätzfehlers als Gleichungsfehler war deutlich geworden, daß die Regressionsanalyse einen systematischen Schätzfehler bei verrauschten, dynamischen Systemen liefern muß. Aus der Schätzgleichung:

$$\hat{\underline{p}} = [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{Y} = \underline{M}^+ \underline{Y} \quad (2.2.24)$$

mit der Pseudoinversen $\underline{M}^+ = [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T$ folgte für den Erwartungswert von $\hat{\underline{p}}$:

$$\mathbb{E} \{ \hat{\underline{p}} \} = \underline{p} + \underline{\varepsilon}_b \quad (2.2.31)$$

mit
$$\underline{\varepsilon}_b = \mathbb{E} \{ [\underline{M}^T \underline{M}]^{-1} \underline{M}^T \underline{e} \} .$$

Bei einem Mittelwert $\underline{e}$ für das Fehlersignal $\underline{e}$ ist damit die Korrelation zwischen der Meßwertmatrix $\underline{M}^T$ und $\underline{e}$ die Ursache für den Bias $\underline{\varepsilon}_b$. Beim Hilfsvariablenverfahren (IVA = instrumental variables)

wird nun diese Meßwertmatrix formal durch eine Hilfswertmatrix $\underline{W}^T$ ersetzt und verlangt, daß die einzelnen Hilfsvariablen $y_H(k)$ streng mit dem Eingangssignal $u(k)$, nicht aber mit dem Störsignal $e(k)$ korreliert sind. In diesem Falle erhält man eine streng konsistente Schätzung, da

$$E \{ \underline{W}^T \underline{e} \} = \underline{0} \quad (2.3.1)$$

Weiterhin müssen Meßwertmatrix und Hilfswertmatrix zueinander "passen", um sinnvolle und numerisch stabile Schätzungen zu ermöglichen.

Ersetzt man die Meßwertmatrix $\underline{M}^T$ der Least-squares-Lösung durch die Hilfswertmatrix $\underline{W}^T$, dann erhält man sofort die explizite Schätzgleichung des IVA-Verfahrens, sofern die Matrix $\underline{W}^T \underline{M}$ nicht singulär ist /27/, /28/:

$$\hat{\underline{P}} = \left[\underline{W}^T \underline{M} \right]^{-1} \underline{W}^T \underline{Y} = \underline{W}^+ \underline{Y} \quad (2.3.2)$$

mit $\underline{W}^+ = \left[\underline{W}^T \underline{M} \right]^{-1} \underline{W}^T \quad (2.3.3)$

Die Schätzgleichung (2.3.2) ergibt sich nun nicht mehr durch formales "Symmetrisieren" der ursprünglichen Modellgleichung:

$$\underline{M} \hat{\underline{P}} = \underline{Y} \quad (2.3.4)$$

sondern durch Multiplikation dieser Gleichung mit der Matrix $\underline{W}^T$:

$$\underline{W}^T \underline{M} \hat{\underline{P}} = \underline{W}^T \underline{Y} \quad (2.3.5)$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \left[\begin{array}{c|c} -\underline{M}_y & \underline{M}_u \end{array} \right] \\ \underline{W} &= \left[\begin{array}{c|c} -\underline{W}_y & \underline{W}_u \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$$\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}_{-y-y} & -\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}_{-y-u} \\ -\underline{\underline{M}}^T_{-u-y} & \underline{\underline{M}}^T_{-u-u} \end{bmatrix}. \quad (2.3.7)$$

Die Matrix $\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}$ ist demnach zwar quadratisch, nicht aber mehr symmetrisch wie beim LS-Verfahren. Eine gewisse Problematik liegt in der Auswahl geeigneter Hilfsvariablen. Prinzipiell eignen sich beliebige Signale, sofern folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}} \right\} = \underline{\underline{R}}, \quad \underline{\underline{R}} \text{ nichtsingulär} \quad (2.3.8)$$

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{e}} \right\} = \underline{\underline{0}}.$$

Für praktische Konvergenzprüfungen werden auch folgende Grenzwerte definiert /29/:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}} \right] = \underline{\underline{R}}, \quad \underline{\underline{R}} \text{ nichtsingulär} \quad (2.3.9)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{e}} \right] = \underline{\underline{0}}.$$

Werden diese Bedingungen erfüllt, dann garantiert Gl. (2.3.9) die Konvergenz des Verfahrens mit der Wahrscheinlichkeit Eins.

Söderström /29/ hat gezeigt, daß eine hinreichende Bedingung, Gl.

(2.3.9) durch Gl. (2.3.8) ersetzen zu können, dann erfüllt ist, wenn das Eingangssignal $u(k)$ entweder deterministisch und periodisch ist oder aber gefiltertes weißes Rauschen darstellt.

Für die Identifizierung am offenen Kreis, wie hier vorausgesetzt wird, läßt sich mit dem unverrauschten Systemausgangssignal $x(k)$ eine optimale Hilfsvariable finden. Dieses Signal $x(k)$ hat keinen statistischen Zusammenhang mit dem Fehlersignal, ist aber über die Systemdynamik streng mit dem Eingangssignal $u(k)$ korreliert /28/.

Im allgemeinen ist der ungestörte Systemausgang $x(k)$ natürlich unbekannt, meßbar ist lediglich

$$y(k) = x(k) + r(k) . \quad (2.3.10)$$

Man muß deshalb auf eine geeignete Schätzung $\hat{x}$ der Ausgangssignale x zurückgreifen, was naturgemäß eine Einbuße an Effizienz gegenüber dem Grenzfall mit $\hat{x} = x$ zur Folge hat.

Als Hilfsvariable y_H soll im folgenden ein Schätzwert des unverrauschten Systemausgangs verstanden werden:

$$y_H(k) = \hat{x}(k) . \quad (2.3.11)$$

Damit läßt sich das Hilfsvariablenverfahren als 2-stufiges Schätzverfahren deuten: Bestimmung der Hilfsvariablen in der 1.Stufe und anschließend die eigentliche Parameterschätzung in der 2.Stufe. Eine wesentliche Eigenschaft des Hilfsvariablenverfahrens ist die Konsistenz der Schätzung $\hat{p}$, d.h. es muß der Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{p}(N)$ existieren und gegen den wahren Wert p konvergieren, und weiterhin muß die Varianz bei wachsendem Beobachtungsintervall abnehmen. Eine hinreichende Bedingung für die Konsistenz ist außer der Erfüllung der Konvergenzbedingung, Gl. (2.3.9), die ausreichende und ständige Anregung der Eigenbewegungen des Prozesses durch das Eingangssignal $u(k)$. Dies ist auch die grundlegende Forderung der Identifizierbarkeit des Prozesses, der als steuerbar und beobachtbar und weiterhin als asymptotisch stabil vorausgesetzt wird.

Die hier getroffene, einfache Konsistenzaussage gilt nur für den Fall, daß als Hilfsvariable der Schätzwert $\hat{x}$ des unverrauschten Systemausgangs x benutzt wird und das zur Schätzung von x benötigte Filter adaptiv ist. Auf diesen Fall wollen wir uns zunächst beschränken, da

er zu sehr einfachen und leistungsstarken Algorithmen führt.

Die explizite Schätzgleichung (2.3.2) läßt sich analog der Ableitung bei der Least-squares-Schätzung rekursiv gestalten. Man erhält dann mit

$$\underline{P}(k) = \left[\underline{W}^T(k) \underline{H}(k) \right]^{-1}, \quad (2.3.12)$$

$$\underline{P}^*(k) = \sigma_{\epsilon}^2 \underline{P}(k) \quad (2.3.13)$$

folgenden Algorithmus:

$$\hat{\underline{p}}(k+1) = \hat{\underline{p}}(k) + \underline{K}(k+1) \left[\underline{y}(k+1) - \underline{W}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k) \right] \quad (2.3.14)$$

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{P}^*(k) - \underline{K}(k+1) \underline{W}^T \underline{P}^*(k) \quad (2.3.15)$$

$$\underline{K}(k+1) = \gamma(k+1) \underline{P}^*(k) \underline{W}(k+1) \quad (2.3.16)$$

$$\text{mit} \quad \gamma(k+1) = \left[\sigma_{\epsilon}^2 + \underline{W}^T(k+1) \underline{P}^*(k) \underline{W}(k+1) \right]^{-1} \quad (2.3.17)$$

und den Abkürzungen:

$$\underline{W}^T(k+1) = \left[-\underline{W}_{\underline{y}}^T \mid \underline{W}_{\underline{u}}^T \right] = \left[-\underline{y}(k), \dots, -\underline{y}(k-n+1) \mid u(k), \dots, u(k-n+1) \right] \quad (2.3.18)$$

$$\underline{W}^T(k+1) = \left[-\underline{W}_{\underline{y}}^T \mid \underline{W}_{\underline{u}}^T \right] = \left[-\underline{y}_{\underline{H}}(k), \dots, -\underline{y}_{\underline{H}}(k-n+1) \mid u(k), \dots, u(k-n+1) \right] \quad (2.3.19)$$

$$\underline{W}^T = \begin{bmatrix} -\underline{W}_{\underline{y}}^T \\ \underline{W}_{\underline{u}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{W}^T(n+1) \\ \underline{W}^T(n+2) \\ \vdots \\ \underline{W}^T(n+k) \end{bmatrix}. \quad (2.3.20)$$

Um den Algorithmus (2.3.14) starten zu können, müssen Anfangsschätzungen $\hat{\underline{p}}(0)$ und $\underline{P}(0)$ vorgegeben werden, womit die gleiche Problematik

erwächst wie bei der rekursiven Regression, nämlich bei $\hat{p}(0) = \underline{0}$ und $P(0) = \alpha \underline{I}$ den Wert α so zu bestimmen, daß der Algorithmus numerisch stabil bleibt, aber auch gut konvergiert. Hilfsvariablen $y_H(k)$ sind als Schätzwerte $\hat{x}(k)$ des unverrauschten Systemausgangs in einfacher Weise über ein Hilfsmodell erhältlich, dessen Struktur identisch ist mit der des Systemmodells und dessen Parameter über ein diskretes Filter bestimmbar sind.

Das Hilfsmodell hat damit folgende Struktur:

$$y_H(k) = - \sum_{i=1}^n a_{iH} y_H(k-i) + \sum_{i=1}^n b_{iH} u(k-i) \quad (2.3.21)$$

Einem Vorschlag von Young /28/ folgend, lassen sich die Parameter $\hat{p}_H = \{a_{iH}, b_{iH}\}$ des Hilfsmodells durch das folgende zeitvariante Tiefpaßfilter gewinnen:

$$\hat{p}_H(k) = (1-\delta)\hat{p}_H(k-1) + \delta \hat{p}(k-v) \quad (2.3.22)$$

mit $0.01 \leq \delta \leq 0.1$, $\hat{p}_H(0) = \underline{0}$.

Um sicherzustellen, daß die Hilfsvariablen $y_H(k)$ möglichst wenig mit dem momentanen Fehlersignal $e(k)$ korreliert sind, wird dabei eine Totzeit v zwischen den geschätzten Systemparametern und den im Hilfsmodell benutzten Parametern in der Filtergleichung (2.3.22) eingeführt und der Gewichtungsfaktor sehr klein gehalten. Durch die Tiefpaßeigenschaft des Filters wird eine Glättung der Schätzwerte $\hat{p}_H$ erzielt und weiterhin eine gewisse Unempfindlichkeit für den genauen Wert der Totzeit v erreicht. Durch empirische Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß sich diese Filtereigenschaften praktisch nicht ändern, wenn der Gewichtungsfaktor δ im Bereich

$$0.01 \leq \delta \leq 0.1 \quad (2.3.23)$$

gewählt wird /13/.

Aus diesem Prinzip wird das Zweistufenmodell des Hilfsvariablenverfahrens deutlich, nämlich die Bestimmung des Hilfsmodells in der 1. Stufe und die anschließende Schätzung der unbekannten Systemparameter, wie im Bild 2.3.1 skizziert /10/, /32/, /33/.

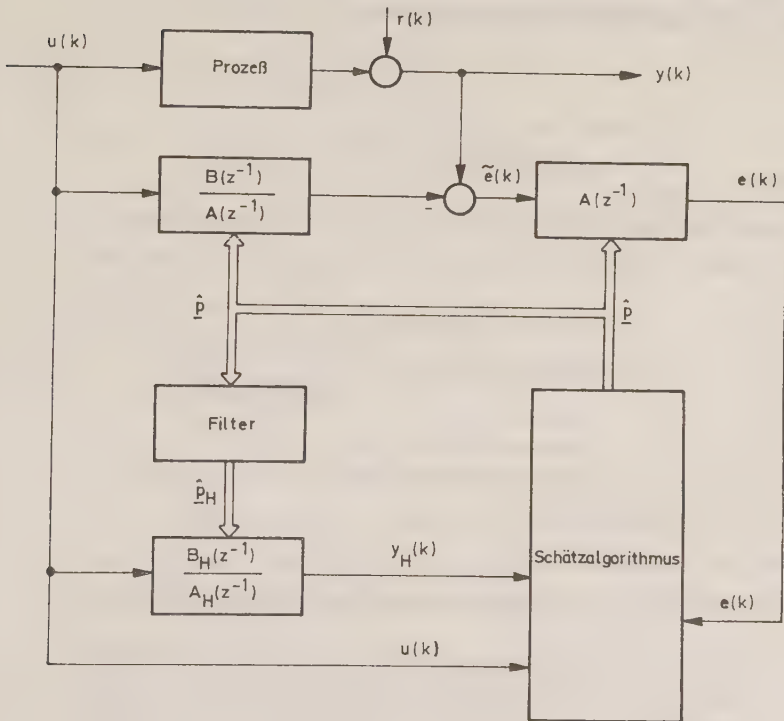


Bild 2.3.1: Modellstruktur bei der Hilfsvariablen-Schätzung

2.4

Numerische Eigenschaften

Eingangs hatten wir nach Bild 1.4.2 den Identifizierungsvorgang aus 3 Teilaufgaben bestehend definiert: Aus der Strukturermittlung, der Kennwertermittlung und schließlich aus der Modellverifizierung. Es ist nun zweckmäßig, die Kennwertermittlung oder Parameterbestimmung zu modifizieren und eine Aufspaltung in eine statistische Schätz-
methode und ein numerisches Schätzverfahren vorzunehmen, wie im Bild 2.4.1 angedeutet wird.

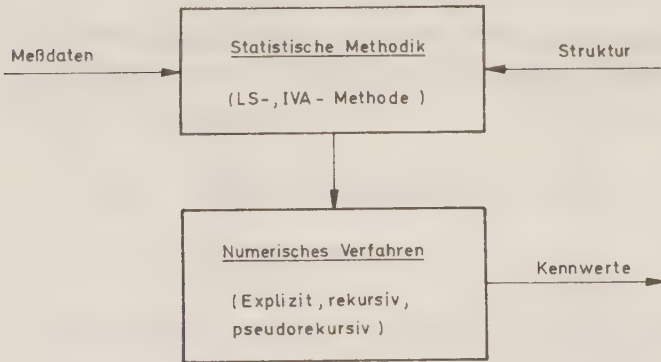


Bild 2.4.1: Prinzip der Kennwertermittlung (Parameterschätzung)

Diese Aufspaltung trägt der Tatsache Rechnung, daß in der Praxis die numerische Seite gravierendere Probleme aufwirft, als es von der statistischen Seite her zu vermuten ist, selbst bei Verwendung von Prozeßrechnern mit vergleichsweise großer Stellenzahl. Es ist häufig sogar zweckmäßig, Verfahren mit größerem systematischem Fehler einzusetzen, wenn damit günstigere numerische Bedingungen

erreicht werden können und der Gesamtfehler in vertretbaren Grenzen bleibt. Ein Verfahren zur Kennwertermittlung kann nur dann als zufriedenstellend bezeichnet werden, wenn die statistischen und vor allem die numerischen Eigenschaften befriedigende Ergebnisse erwarten lassen. Dabei basiert die Konsistenz der Schätzung auf einer eindeutigen Lösung der grundlegenden Schätzgleichung.

Zur Bewertung der numerischen Eigenschaften verschiedener Verfahren gehen wir von der folgenden, fundamentalen Schätzgleichung aus:

$$\hat{M} [Mxq] \hat{P} [qx1] = Y [Mx1] \quad (2.4.1)$$

mit $q = 2n$, $M \geq q$ und $\text{Rang}(\underline{M}) = q$.

Vereinfachend wollen wir uns auf den reellen, zunächst genau bestimmten Fall beschränken, mit $M = 2n = q$. Dann gelte allgemein statt Gl. (2.4.1)

$$\underline{A} [rxr] \underline{x} [rx1] = \underline{b} [rx1] \quad (2.4.2)$$

In diesem inhomogenen Gleichungssystem ist $\underline{A}$ eine quadratische Koeffizientenmatrix vom Rang r . Da wir eine nichtsinguläre Matrix $\underline{A}$ von vollem Rang voraussetzen, d.h. $r = q$ und $\det(\underline{A}) \neq 0$, ist die Lösung von Gl. (2.4.2) eindeutig, sofern überhaupt eine Lösung existiert.

Bestimmt man nun mit Hilfe eines beliebigen numerischen Verfahrens eine Lösung von Gl. (2.4.2), dann erhält man aufgrund der zur Verfügung stehenden endlichen Stellenzahl i.a. eine Näherungslösung $\tilde{x}$ für die exakte Lösung x . Um den Fehler $\Delta x = \tilde{x} - x$ zu messen, führen wir den Begriff der Norm ein. Man versteht unter der Norm eine reelle Funktion, die jedem Vektor x eine reelle Zahl $\|x\|$ zuordnet, die

als Maß für die "Größe" von $\underline{x}$ dienen soll. Folgende Forderungen werden an eine Vektornorm $\|\underline{x}\|$ gestellt /20/, /34/:

- a) $\|\underline{x}\| > 0$ für alle $\underline{x}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$
- b) $\|c\underline{x}\| = |c| \|\underline{x}\|$ für beliebigen Skalar c (2.4.3)
- c) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ (Dreiecksungleichung).

Die folgenden 3 Normen sind allgemein gebräuchlich /36/:

$$\|\underline{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_r|^p)^{1/p} \quad (2.4.4)$$

mit $p = 1, 2, \infty$.

Dabei ist

$$\|\underline{x}\|_2 = (\underline{x}^T \underline{x})^{1/2} \quad \text{Euklidische Norm} \quad (2.4.5)$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \quad \text{Maximum-Norm} \quad (2.4.6)$$

$\|\underline{x}\|_2$ wird auch die "Länge" des Vektors $\underline{x}$ genannt.

Entsprechend wird man auch von einer Norm der Matrix $\underline{A}$ verlangen:

- a) $\|\underline{A}\| > 0$ für alle $\underline{A} \neq \underline{0}$
- b) $\|c\underline{A}\| = |c| \|\underline{A}\|$ (2.4.7)
- c) $\|\underline{A} + \underline{B}\| \leq \|\underline{A}\| + \|\underline{B}\|$
- d) $\|\underline{A} \underline{B}\| \leq \|\underline{A}\| \|\underline{B}\|$ (multiplikative Norm) .

Vektor- und Matrixnormen sind nun nicht beliebig miteinander kombinierbar. Eine Matrixnorm $\|\underline{A}\|$ ist nur dann mit einer bestimmten Vektornorm $\|\underline{x}\|$ verträglich, wenn für alle $\underline{A}$ und $\underline{x}$ die Ungleichung besteht /36/:

$$\|\underline{A} \underline{x}\| \leq \|\underline{A}\| \|\underline{x}\| \quad (2.4.8)$$

Den in Gl. (2.4.5) eingeführten Vektornormen zugeordnete Matrixnormen sind:

$$\begin{aligned} \|\underline{A}\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| && \underline{\text{Zeilensummennorm}} \\ \|\underline{A}\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| && (2.4.9) \end{aligned}$$

$$\|\underline{A}\|_2 = H(\underline{A}) = \text{lub}(\underline{A}) = s_{\max}(\underline{A}) \quad \underline{\text{Spektralnrm}}$$

Die Spektralnrm $H(\underline{A})$ wird über den größten singulären Wert $s_{\max}(\underline{A})$ der Matrix $\underline{A}$ definiert, wobei $s_{\max}$ aus dem größten reellen Eigenwert $\lambda_{\max}(\underline{A}^T \underline{A})$ der Matrix $\underline{A}^T \underline{A}$ bestimmbar ist:

$$\boxed{s_{\max}^2(\underline{A}) = \lambda_{\max}(\underline{A}^T \underline{A})} \quad (2.4.10)$$

Bei symmetrischer, oder allgemeiner, bei normaler Matrix $\underline{A}$ vereinfacht sich dieser Ausdruck:

$$s_{\max}(\underline{A}) = \lambda_{\max}(\underline{A}) \quad (2.4.11)$$

Weitere mit $\|\underline{x}\|_2$ verträgliche Matrixnormen sind:

$$\begin{aligned} \|\underline{A}\|_G &= M(\underline{A}) = n \max_{i,j} |a_{ij}| && \underline{\text{Gesamtnorm}} \\ \|\underline{A}\|_F &= N(\underline{A}) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} && \underline{\text{Frobeniusnorm}} \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Für die Größe der einzelnen Normen gilt nach /34/:

$$\begin{aligned} H(\underline{A}) &\leq N(\underline{A}) \leq M(\underline{A}) \\ H(\underline{A}) &\leq N(\underline{A}) \leq n^{1/2} H(\underline{A}) \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Unter allen mit einer Vektornorm $\|\underline{x}\|$ verträglichen Matrixnormen

ist die kleinste am wertvollsten. Für diesen Fall gilt in Gl. (2.4.8) das Gleichheitszeichen. Da dieser Wert nicht mehr unterschritten werden kann, heißt diese Norm Grenznorm, und man bezeichnet sie mit $\text{lub}(\underline{A})$ ($\text{lub} = \text{least upper bound}$). Unter dieser Schrankennorm versteht man die kleinste Zahl α , für die gilt:

$$\| \underline{A} \underline{x} \| \leq \alpha \| \underline{x} \|, \quad (2.4.14)$$

oder für alle Vektoren $\underline{x}$:

$$\text{lub}(\underline{A}) = \min_{\underline{x}} \alpha = \max_{\substack{\underline{x} \neq 0 \\ \|\underline{x}\|=1}} \frac{\|\underline{A} \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \max_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{A} \underline{x}\| \quad (2.4.15)$$

Für die Euklidische Norm $\|\underline{x}\|_2$ gilt dann im Grenzfall:

$$\text{lub}_2(\underline{A}) = \max_{\substack{\underline{x} \neq 0 \\ \|\underline{x}\|_2=1}} \sqrt{\frac{\underline{x}^T \underline{A}^T \underline{A} \underline{x}}{\underline{x}^T \underline{x}}} = \sqrt{\lambda_{\max}(\underline{A}^T \underline{A})} = s_{\max}(\underline{A}) \quad (2.4.16)$$

Es ist daher immer

$$\text{lub}(\underline{A}) \leq \| \underline{A} \|, \quad (2.4.17)$$

und da eine beliebige Norm $\| \underline{A} \|$ eine obere Schranke für die singulären Werte von $\underline{A}$ darstellt, ist $\text{lub}(\underline{A})$ die kleinste obere Schranke für diese singulären Werte.

Aus Gl. (2.4.9) folgt für eine orthogonale Matrix $\underline{R}$ mit $\underline{R}^T \underline{R} = \underline{I}$:

$$\| \underline{R} \|_2 = H(\underline{R}) = \text{lub}(\underline{R}) = 1 \quad (2.4.18)$$

Man kann nun Normen benutzen, um bei einem linearen Gleichungssystem $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ den Einfluß von Änderungen in $\underline{A}$ und $\underline{b}$ auf die Lösung $\underline{x}$ abzuschätzen. Als derartige Änderungen lassen sich die durch begrenzte Stellenzahl des Digitalrechners bedingten Ungenauigkeiten

auffassen, andererseits handelt es sich bei dem Schätzproblem um verrauschte Größen in $\underline{A}$ und $\underline{b}$.

Gehört zur rechten Seite ($\underline{b} + \Delta \underline{b}$) die Lösung ($\underline{x} + \Delta \underline{x}$), dann folgt aus

$$\underline{A} \Delta \underline{x} = \Delta \underline{b} \quad (2.4.19)$$

die Abschätzung:

$$\|\Delta \underline{x}\| \leq \|\underline{A}\|^{-1} \|\Delta \underline{b}\| \quad (2.4.20)$$

Für die relativen Änderungen $\|\Delta \underline{x}\| / \|\underline{x}\|$ folgt dann weiter wegen

$$\|\underline{b}\| = \|\underline{A} \underline{x}\| \leq \|\underline{A}\| \|\underline{x}\| :$$

$$\frac{\|\Delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \|\underline{A}\|^{-1} \frac{\|\Delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} = \text{cond}(\underline{A}) \frac{\|\Delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \quad (2.4.21)$$

mit der Abkürzung:

$$\text{cond}(\underline{A}) = \|\underline{A}\| \|\underline{A}\|^{-1} \quad (2.4.22)$$

Dabei bezeichnet $\text{cond}(\underline{A})$ die sogenannte Kondition der Matrix $\underline{A}$.

$\text{cond}(\underline{A})$ ist ein Maß für die Empfindlichkeit des relativen Fehlers der Lösung $\underline{x}$ gegenüber Änderungen der rechten Seite. Für $\text{cond}(\underline{A})$ gilt mit $\underline{A} \underline{A}^{-1} = \underline{I}$:

$$\text{lub}(\underline{I}) = 1 \leq \text{lub}(\underline{A}) \text{lub}(\underline{A}^{-1}) \leq \|\underline{A}\| \|\underline{A}^{-1}\| = \text{cond}(\underline{A}) \quad (2.4.23)$$

$$\text{d.h.} \quad \text{cond}(\underline{A}) \geq 1$$

Entsprechend mißt $\text{cond}(\underline{A})$ auch die Störempfindlichkeit der Lösung $\underline{x}$ von $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ gegenüber Änderungen der Matrix $\underline{A}$. Es gilt dann folgende Abschätzung /20/, /34/:

$$\frac{\|\Delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(\underline{A})}{1 - \text{cond}(\underline{A}) \frac{\|\Delta \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|}} \frac{\|\Delta \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|} \quad (2.4.24)$$

$$\text{bei } \|\underline{A}^{-1}\| \|\underline{\Delta A}\| < 1 \quad (2.4.25)$$

Haben nun kleine Fehler in der Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ bzw. in der rechten Seite $\underline{b}$ nur geringen Einfluß auf die Lösung $\underline{x}$, dann spricht man von einem gut konditionierten System oder von einer gut konditionierten Matrix $\underline{A}$. Ist die Störempfindlichkeit dagegen groß, dann heißt die Matrix $\underline{A}$ schlecht konditioniert. Dieser Fall tritt in der Praxis sehr häufig auf und zeichnet sich dadurch aus, daß eine oder mehrere Zeilen oder Spalten der Matrix $\underline{A}$ nahezu linear abhängig sind, also ungefähr die gleiche Information beinhalten. Dann ist die Determinante von $\underline{A}$ zwar nicht exakt Null, aber betragsmäßig sehr klein, wobei die numerische Lösung von $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ umso unzuverlässiger wird, je kleiner $D = |\det(\underline{A})|$ ist. In solchen Fällen ist die Eindeutigkeit der Lösung $\underline{x}$ nicht mehr gewährleistet.

Im Rahmen der Systemidentifizierung können schlecht konditionierte Matrizen i. a. bei zu großer Wahl der Modellordnung auftreten, weiterhin bei ungünstig vorliegenden Eingangssignalen und besonders bei ungünstiger Wahl der Abtastzeit T_0 , die meist nur in engen Grenzen veränderbar ist. Wird T_0 sehr klein gewählt im Vergleich zu den wesentlichen System-Zeitkonstanten und/oder zu der Änderungsgeschwindigkeit der Eingangssignale, dann ergibt sich ein nahezu linear abhängiges Gleichungssystem. Bei zu großer Abtastzeit werden die schnellen Eigenbewegungen des Systems gemäß dem Shannon'schen Abtasttheorem nicht mehr ausreichend erfaßt und die Modellordnung wird im Prinzip reduziert. Die Systembeschreibung kann dann zu ungenau werden, was sich besonders dann auswirkt, wenn die Strecke nahezu instabil ist und die angenommene Modellordnung zu groß ist.

Generell sind nun sämtliche Verfahren, schlecht konditionierte Systeme der Form $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ zu lösen, problematisch. Dies gilt sowohl

für direkte Verfahren hinsichtlich großer Rundungsfehler als auch für iterative oder rekursive Verfahren bezüglich schlechter Konvergenz. Um ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem zu erkennen, ist der Zahlenwert $\text{cond}(\underline{A}) = \|\underline{A}\| \|\underline{A}^{-1}\|$ zu bestimmen. Dazu muß nach Gl. (2.4.22) die Inverse von $\underline{A}$ bekannt sein, die aber bei direkter Lösung von $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$, beispielsweise mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus, nicht von Interesse ist. Es ist daher günstiger, Konditionenzahlen zu definieren, die sich ohne großen numerischen Mehraufwand bestimmen lassen. Als eine solche kann die sogenannte Hadamard'sche Konditionenzahl K_H aufgefaßt werden, die sich als Kehrwert der Determinante der normalisierten Matrix $\underline{A}$ ergibt /37/:

$$K_H(\underline{A}) = V / \det(\underline{A}) \quad (2.4.26)$$

$$\text{mit } V = \prod_{i=1}^r a_i, \quad a_i = \left[\sum_{k=1}^r a_{ik}^2 \right]^{1/2} \quad (2.4.27)$$

Verwendet man als Maß für die Norm in Gl. (2.4.21) die Spektralnorm, dann ergibt sich die sog. Spektralkonditionenzahl $K_S(\underline{A})$, die aus dem Verhältnis von größtem zu kleinstem singulären Wert von $\underline{A}$ gebildet wird, zu ihrer Bestimmung allerdings die Lösung einer Eigenwertaufgabe verlangt:

$$K_S(\underline{A}) = \text{lub}(\underline{A}) \text{lub}(\underline{A}^{-1}) = \left| \frac{s_{\max}(\underline{A})}{s_{\min}(\underline{A})} \right| = \left| \frac{\lambda_{\max}(\underline{A}^T \underline{A})}{\lambda_{\min}(\underline{A}^T \underline{A})} \right|^{1/2} \quad (2.4.28)$$

Bei symmetrischer Matrix $\underline{A}$ gilt vereinfacht:

$$K_S(\underline{A}) = \left| \frac{s_{\max}(\underline{A})}{s_{\min}(\underline{A})} \right| = \left| \frac{\lambda_{\max}(\underline{A})}{\lambda_{\min}(\underline{A})} \right| \quad (2.4.29)$$

Ein Gleichungssystem $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ ist demnach immer dann gut konditioniert, wenn die Eigen- oder singulären Werte der Matrix $\underline{A}$ nahe beieinander

liegen. Nach Hadamard sind dann folgende Bedingungen erfüllt /38/:

1. Der Operator $\underline{A}$ hat eine Inverse $\underline{A}^{-1}$, sodaß für jedes $\underline{b}$ eine eindeutige Lösung $\underline{A}^{-1}\underline{b}$ existiert.
2. $\underline{A}^{-1}$ ist ein beschränkter Operator, sodaß es für alle Vektoren $\underline{u}, \underline{v}$ eine Zahl M gibt, für die gilt:

$$\|\underline{A}^{-1}\underline{u} - \underline{A}^{-1}\underline{v}\| \leq M \|\underline{u} - \underline{v}\| \quad (2.4.30)$$

Es sei hier darauf hingewiesen, daß der Begriff der Kondition einer Matrix ein relativer Begriff ist, der in diesem Zusammenhang nur zur Beurteilung der Lösung linearer Gleichungssysteme verwandt wird, während er für die Polynom- oder Eigenwertbestimmung völlig andere Bedeutung haben kann. Die gleichwertig nebeneinander benutzten Begriffe der Kondition einer Matrix, eines Gleichungssystems oder eines Verfahrens sind daher eindeutig im Rahmen dieser Betrachtungen.

Aufgrund der Definitionen (2.4.28) und (2.4.30) wird deutlich, daß die Kondition eines Gleichungssystems ohne Bezug zu irgendeinem Lösungsverfahren ist, sondern sich direkt aus der Beschaffenheit der bestimmenden Matrix $\underline{A}$ im System $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ ergibt. Demnach ist die Formulierung der Schätzgleichung von grundlegender Bedeutung für die zu erwartende Kondition des Parameter-Schätzproblems.

Ein weiterer, in numerischer Hinsicht wichtiger Begriff ist der einer positiv definiten Matrix $\underline{A}$, der sich direkt auf ein geeignetes Verfahren zur Bestimmung von $\underline{x}$ bezieht, also unabhängig von irgendwelchen Konditionenzahlen ist. Die $(r \times r)$ -Matrix $\underline{A}$ heißt dann positiv definit, wenn im reellen Fall gilt:

$$a) \quad \underline{A} = \underline{A}^T$$

$$b) \quad Q = \underline{x}^T \underline{A} \underline{x} > 0 \quad \text{für alle } \underline{x} \neq \underline{0} \quad (2.4.31)$$

Weitere Eigenschaften sind:

$$\det(\underline{A}) > 0$$

$$\lambda_i(\underline{A}) > 0, \text{ reell} \quad i = 1, \dots, r \quad (2.4.32)$$

Die aus der numerischen Mathematik bekannten stabilsten Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme sind die für positiv definite Matrizen /34/, da neben den genannten Eigenschaften (2.4.32) die betragsgrößten Elemente immer in der Hauptdiagonalen stehen und stets positiv sind. Im reellen Fall ist dann immer folgende Aufspaltung möglich:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{L}^T \quad (2.4.33)$$

wobei $\underline{L}$ eine untere, reelle Dreiecksmatrix ist mit $\underline{L} = \{l_{ik}\}$ und

$$\begin{aligned} l_{ik} &= 0 & \text{für } k > i \\ l_{ii} &> 0 & \text{für } i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Von dieser Aufspaltung macht beispielsweise das bekannte Cholesky-Verfahren Gebrauch /20/. Entsprechend Gl. (2.4.33) läßt sich eine positiv definite Matrix $\underline{A}$ auch zerlegen in

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B}^T & \underline{C} \end{bmatrix}, \quad (2.4.35)$$

wenn $\underline{U}$ eine obere Dreiecksmatrix ist von folgender Form:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} \\ 0 & \underline{U}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4.36)$$

Aus der Definition der Grenznorm

$$\text{lub}(\underline{A}) = \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|\underline{A} \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \quad (2.4.15)$$

folgt auch für die nichtsinguläre Matrix $\underline{A}$:

$$\frac{1}{\text{lub}(\underline{A}^{-1})} = \min_{\underline{Y} \neq 0} \frac{\|\underline{A} \underline{Y}\|}{\|\underline{Y}\|} \quad (2.4.37)$$

Bezüglich der Euklidischen Norm lassen sich dann für $\text{lub}(\underline{U}^{-1})$ und $\text{lub}(\underline{U})$ folgende Abschätzungen angeben, wenn u_{ii} ein beliebiges Diagonalelement von $\underline{U}$ ist /20/:

$$u_{ii}^2 \geq \min_{\underline{x} \neq 0} \frac{\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}}{\underline{x}^T \underline{x}} = \frac{1}{\text{lub}(\underline{U}^{-1})^2} \quad (2.4.38)$$

$$u_{ii}^2 \leq \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}}{\underline{x}^T \underline{x}} = \text{lub}(\underline{U})^2 \quad (2.4.39)$$

Für $\text{cond}(\underline{U})$ ergibt sich damit eine Abschätzung nach unten:

$$\text{cond}(\underline{U}) \geq \max_{1 \leq i, k \leq r} \frac{u_{ii}}{u_{kk}} = K_M$$

(2.4.40)

Dieses einfach zu bildende Verhältnis von größtem zu kleinstem Diagonalelement der oberen Dreiecksmatrix $\underline{U}$ wollen wir als Minimal-konditionszahl K_M bezeichnen. Die Bedeutung von K_M liegt in erster Linie in praktischen Gesichtspunkten. Man weiß nämlich empirisch, daß die Auflösung von gestaffelten Gleichungssystemen mit erheblich kleineren Fehlern verbunden ist, als es theoretisch für eine bestimmte signifikante Stellenzahl, beispielsweise nach Gl. (2.4.24), zu erwarten wäre /36/. Man kann daher davon ausgehen, daß für solche Dreiecksmatrizen $\underline{U}$ die Minimalkonditionszahl K_M den tatsächlichen Gegebenheiten näher kommt, als es $\text{cond}(\underline{U})$ oder die Spektralkonditionszahl K_S ausdrücken.

2.4.1 Kondition der Least-squares-Verfahren

Als grundlegende Schätzgleichung hatten wir definiert:

$$\underline{M} [Nxq] \hat{p} [qx1] = \underline{Y} [Nx1] \quad (2.4.1)$$

mit $q = 2n$, $N \geq q$ und $\text{Rang}(\underline{M}) = q$.

Für den genau bestimmten Fall mit $N = q$ ergibt sich folgende Lösung:

$$\hat{p} = \underline{M}^{-1} \underline{Y} \quad (2.4.41)$$

Im allgemeinen, Überbestimmten Fall lautet die explizite Lösung der Least-squares-Schätzung:

$$\hat{p} = \underline{M}^+ \underline{Y} \quad (2.4.42)$$

Die Pseudoinverse $\underline{M}^+$ ist dabei wie folgt definiert:

$$\underline{M} = \underline{M}^T \underline{M}^{-1} \underline{M}^T \quad (2.4.43)$$

$$\underline{M}^+ \underline{M} = \underline{I} \quad (2.4.44)$$

Als Konditionszahl gilt dann entsprechend Gl. (2.4.16):

$$\text{cond}(\underline{M}) = \|\underline{M}\| \|\underline{M}^+\| = \text{cond}(\underline{M}^T) = \text{cond}(\underline{M}^+) \quad (2.4.45)$$

$$\text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) = \text{cond}(\underline{M} \underline{M}^T) = [\text{cond}(\underline{M})]^2 \quad (2.4.46)$$

Zweckmäßigerweise wird man $\hat{p}$ nicht direkt nach Gl. (2.4.42) bestimmen, da die Berechnung der Pseudoinversen $\underline{M}^+$ die numerisch sehr aufwendige Inversion der Matrix $[\underline{M}^T \underline{M}]$ erfordert. Multiplikation der Gl. (2.4.1) von links mit der Matrix $\underline{M}^T$ führt dagegen auf folgendes Gleichungssystem:

$$[\underline{M}^T \underline{M}] \hat{p} = \underline{M}^T \underline{Y} \quad (2.4.47)$$

oder allgemein:

$$[\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}]_{[qxq]} \hat{\underline{\underline{p}}}_{[qx1]} = [\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{y}}]_{[qx1]} \quad (2.4.48)$$

Aus Gl. (2.4.47) läßt sich $\hat{\underline{\underline{p}}}$ direkt mit Hilfe eines der bekannten Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme bestimmen /34/.

Man wird dabei dem Cholesky-Verfahren den Vorzug geben, da es die Symmetrieeigenschaft der Matrix $[\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}]$ ausnutzt und deshalb den geringsten numerischen Aufwand benötigt.

Die Störempfindlichkeit der Lösung $\hat{\underline{\underline{p}}}$ hängt beim expliziten oder nichtrekursiven Least-squares-Verfahren dann nach Gl. (2.4.47) von der Kondition der Matrix $[\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}]$ ab. Ist die Meßwertmatrix $\underline{\underline{M}}$ selbst schon schlecht konditioniert, dann wird die Kondition von $[\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}]$ nach Gl. (2.4.46) noch weiter verschlechtert und die Lösung $\hat{\underline{\underline{p}}}$ äußerst unsicher, unabhängig davon, ob die Meßwerte durch Rauschen verfälscht sind oder nicht. Wir erhalten damit die wichtige Eigenschaft, daß das explizite Schätzverfahren nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate in der Praxis immer eine schlechtere Kondition hat als durch die Meßwertmatrix $\underline{\underline{M}}$ vorgegeben.

Für das rekursive Schätzverfahren gilt im Prinzip die gleiche Aussage, da die Rekursionsbeziehungen aus der expliziten Schätzgleichung (2.4.42) bzw. (2.4.47) abgeleitet wurden. Vorteilhaft ist lediglich, daß die Inversion der Matrix $[\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}]$ umgangen wird und die Gewichtsmatrix $\underline{\underline{P}} = [\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}]^{-1}$ stattdessen durch skalare bzw. Matrix-Produkte gebildet wird. Die Kondition dieses Verfahrens bleibt aber gegenüber der expliziten Schätzung unverändert. Hinzu kommt beim rekursiven Verfahren die Schwierigkeit, geeignete Startwerte für $\hat{\underline{\underline{p}}}(0)$ und $\underline{\underline{P}}(0)$ vorgeben zu müssen. Bei einer Wahl $\hat{\underline{\underline{p}}}(0) = \underline{\underline{0}}$ und $\underline{\underline{P}}(0) = \alpha \underline{\underline{I}}$ muß die skalare Größe α so gewählt werden, daß das

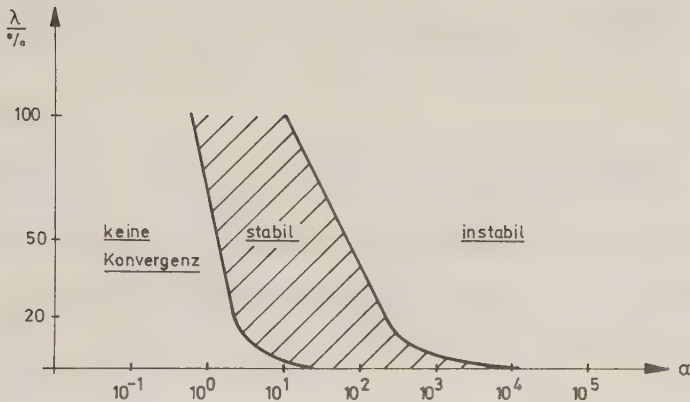


Bild 2.4.1: Startwerte $P(o) = \alpha \underline{I}$ des rekursiven Verfahrens

Verfahren schnell konvergiert, andererseits aber numerisch stabil bleibt. Durch Experimentieren wird man, wie im Bild 2.4.1 quantitativ angedeutet, einen Wertebereich für α finden können, für den das rekursive Verfahren diese Bedingungen erfüllt. Die Lage des Stabilitätsgebietes ist jedoch für jeden Prozeß verschieden, während die Form des stabilen und konvergierenden Bereiches hinsichtlich Breite und Neigung vom Störpegel λ und weiterhin von der Kondition des Modellsystems abhängt. Rein quantitativ kann lediglich gesagt werden, daß sich der stabile Bereich zu größeren Störungen hin verengt und umso breiter wird, je besser die Kondition von $\underline{M}$ ist. Aufgrund solcher Aussagen in einer nur pauschal möglichen Form wird es in der Praxis ohne großen Mehraufwand nur sehr schwer, wenn überhaupt möglich sein, einen geeigneten Wert α aus dem stabilen Bereich zu finden, mit dem das rekursive Verfahren konvergierende Ergebnisse liefert.

Beim pseudorekursiven Least-squares-Verfahren wird die Bestimmung der unbekannten Parameter nach Gl. (2.2.98) ausgeführt:

$$[\underline{T} \quad \underline{M}] \hat{\underline{p}} = \underline{T} \underline{y} \quad (2.4.49)$$

$$\text{oder} \quad \underline{M}^* [\underline{q} \times \underline{q}] \hat{\underline{p}} [\underline{q} \times 1] = \underline{y}_1^* [\underline{q} \times 1] \quad (2.4.50)$$

$$\text{mit} \quad \underline{M}^* = \underline{T} \underline{M}, \quad \underline{y}_1^* = \underline{T} \underline{y} \quad (2.4.51)$$

Dabei ist $\underline{M}^*$ eine in obere Dreiecksform transformierte Matrix, und durch die Vorgabe der Startwerte

$$\underline{Z}^*(0) = [\underline{M}^*(0) \mid \underline{y}_1^*(0)] = \underline{0} \quad (2.4.52)$$

wird ein problemloser Anlauf der rekursiv gestalteten orthogonalen Transformation ermöglicht. Die Transformationsmatrix $\underline{T}$ ist eine orthogonale Matrix, die aus dem Produkt einzelner orthogonaler Givens- oder Householder-Matrizen gebildet wird:

$$\underline{T} = \prod_{i,j} \underline{T}_{ij}^i \quad (2.4.53)$$

$$\text{mit} \quad \underline{T}^T \underline{T} = \underline{I} \quad (2.4.54)$$

Nach Gl. (2.4.18) gilt für orthogonale Matrizen:

$$\text{lub}(\underline{T}) = \text{lub}(\underline{T}^{-1}) = 1 \quad (2.4.55)$$

und mit Gl. (2.4.23) folgt:

$$\text{cond}(\underline{T}) = \|\underline{T}\| \|\underline{T}^{-1}\| = \text{lub}(\underline{T}) \text{lub}(\underline{T}^{-1}) = 1 \quad (2.4.56)$$

Daher ist auch:

$$\text{cond}(\underline{M}^*) = \text{cond}(\underline{T} \underline{M}) = \text{lub}(\underline{M}) \text{lub}(\underline{T}^{-1}) = \text{cond}(\underline{M}) \quad (2.4.57)$$

Wir erhalten damit die wesentliche Eigenschaft des pseudorekursiven

Verfahrens, daß in der durch Orthogonaltransformation gebildeten Matrix $\underline{M}^*$ die Kondition der ursprünglichen Meßwertmatrix $\underline{M}$ erhalten bleibt.

Die Konditionszahlen der einzelnen numerischen Verfahren der statistischen LS-Methode sind in Tabelle 2.4.1 zusammengestellt, wobei LS-EXP das explizite Verfahren, LS-REK das rekursive Verfahren und LS-DPR das pseudorekursive Verfahren bezeichnen, wobei wir letzteres wegen der direkten Meßwertverarbeitung auch direktes pseudorekursives Verfahren nennen wollen.

Verfahren	Bestimmende Matrix	Konditionszahl
LS - EXP	$\underline{M}^T \underline{M}$	$[\text{cond}(\underline{M})]^2$
LS - REK	$\underline{M}^T \underline{M}$	$[\text{cond}(\underline{M})]^2$
LS - DPR	$\underline{T}^T \underline{M}$	$\text{cond}(\underline{M})$

Tabelle 2.4.1: Kondition der numerischen LS-Verfahren.

2.4.2 Eigenschaften der Hilfsvariablenverfahren

Die explizite Schätzgleichung der Hilfsvariablenmethode war nach Gl. (2.3.5):

$$[\underline{W}^T \underline{M}]_{[qxq]} \hat{\underline{P}}_{[qx1]} = [\underline{W}^T \underline{Y}]_{[qx1]} \quad (2.4.58)$$

$$\text{mit} \quad q = 2n, \quad N \geq q \quad \text{und} \quad \text{Rang}(\underline{M}) = \text{Rang}(\underline{W}) = q \quad (2.4.59)$$

Aus Gl. (2.4.58) wird deutlich, daß die Matrix $[\underline{W}^T \underline{M}]$ zwar quadratisch, aber nicht mehr symmetrisch ist, wie es für die entsprechende Matrix $[\underline{M}^T \underline{M}]$ des LS-Verfahrens der Fall war. Dies hat zur Folge, daß das

DPR-Verfahren analog zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate hier bei der IVA-Methodik nicht einsetzbar ist.

Mit dem Verlust der Symmetrieeigenschaften in $[\underline{W}^T \underline{M}]$ geht nach Gl. (2.4.31) auch die gewünschte Eigenschaft der positiven Definitheit verloren. Man muß daher davon ausgehen, daß sämtliche Lösungsverfahren zur Bestimmung von $\hat{\underline{p}}$ in Gl. (2.4.58) prinzipiell weniger stabil sind als die entsprechenden Verfahren zur Lösung der LS-Schätzgleichung.

Wenn andererseits die Ursache für die schlechte Kondition eines Gleichungssystems darin zu sehen ist, daß nahezu lineare Abhängigkeit zwischen bestimmten Matrix-Spalten besteht, dann läßt sich unmittelbar einsehen, daß durch Einführen von verrauschten Größen eine gewisse Stabilisierung oder Konditionsverbesserung eines unverrauschten Systems erreicht werden kann. Zur Bildung der Hilfswertmatrix $\underline{W} = [-\underline{W}_y \mid \underline{M}_u]$ wird aber aus statistischen Gründen der umgekehrte Weg beschritten, da die in $\underline{W}_y$ enthaltenen Hilfsvariablen $y_H(k)$ Schätzungen des unverrauschten System-Ausgangssignals sind.

Der statistische Idealfall

$$y_H(k) = x(k) \quad , \quad (2.4.60)$$

für den sich theoretisch streng konsistente Parameterschätzungen $\hat{\underline{p}}$ erzielen lassen, stellt daher in numerischer Hinsicht den ungünstigsten Fall bezüglich der Eindeutigkeit der Schätzung $\hat{\underline{p}}$ dar.

Da in der Matrix $\underline{W}$ gegenüber $\underline{M}$ die Meßwerte $y(k)$ durch entsprechende Schätzwerte $\hat{x}(k)$ ersetzt sind, ist die Konditionszahl von $\underline{W}$ im allgemeinen größer als die der Meßwertmatrix $\underline{M}$, und damit ist auch das explizite IVA-Verfahren prinzipiell schlechter konditioniert als das explizite LS-Verfahren. Mit

$$\text{cond}(\underline{W}) \geq \text{cond}(\underline{M}) \quad (2.4.61)$$

folgt weiter:

$$\text{cond}(\underline{W}^T \underline{M}) \geq \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) > \text{cond}(\underline{M})$$

(2.4.62)

Diese verschlechterte Kondition kommt natürlich auch im rekursiven Hilfsvariablenverfahren zum Ausdruck, und zwar in Form eines verengten und stärker geneigten Stabilitätsbereiches für den Skalar α der Startmatrix $\underline{P}(0) = \alpha \underline{I}$.

Prozeß	Störung 20%, 50%, 100%	Störung		
		20%	50%	100%
I	1	5	0.4	0.05
II	10^4	10^4	2	1
III	10^8	10	?	?
	LS-Verfahren	IVA-Verfahren		

Tabelle 2.4.2: Startwerte α der rekursiven Verfahren

Einen Einblick in die Größenordnung von α für 3 simulierte Prozesse gibt Tabelle 2.4.2 für das rekursive Least-squares- und Hilfsvariablenverfahren /14/. Dabei wird die starke Abhängigkeit des Wertes α vom Prozeß selbst, vom Störpegel und von der statistischen Schätzmethode deutlich.

2.4.3 Numerischer Aufwand

Unter dem numerischen Aufwand eines Verfahrens wollen wir den Bedarf an Speicherplätzen für Zahlenfelder und die Anzahl von arithmetischen Operationen verstehen. Der Speicherbedarf ist jeweils beim expliziten Verfahren am größten, da die im allgemeinen sehr großen

Verfahren	Explizit	Rekursiv	Pseudorekursiv
LS	$Nq + 2q^2 + 3q$	$2q^2 + 4q$	$q^2 + 4q + 1$
IVA	$2Nq + 2q^2 + 4q$	$2q^2 + 5q$	-

Tabelle 2.4.3: Speicherbedarf der Schätzverfahren

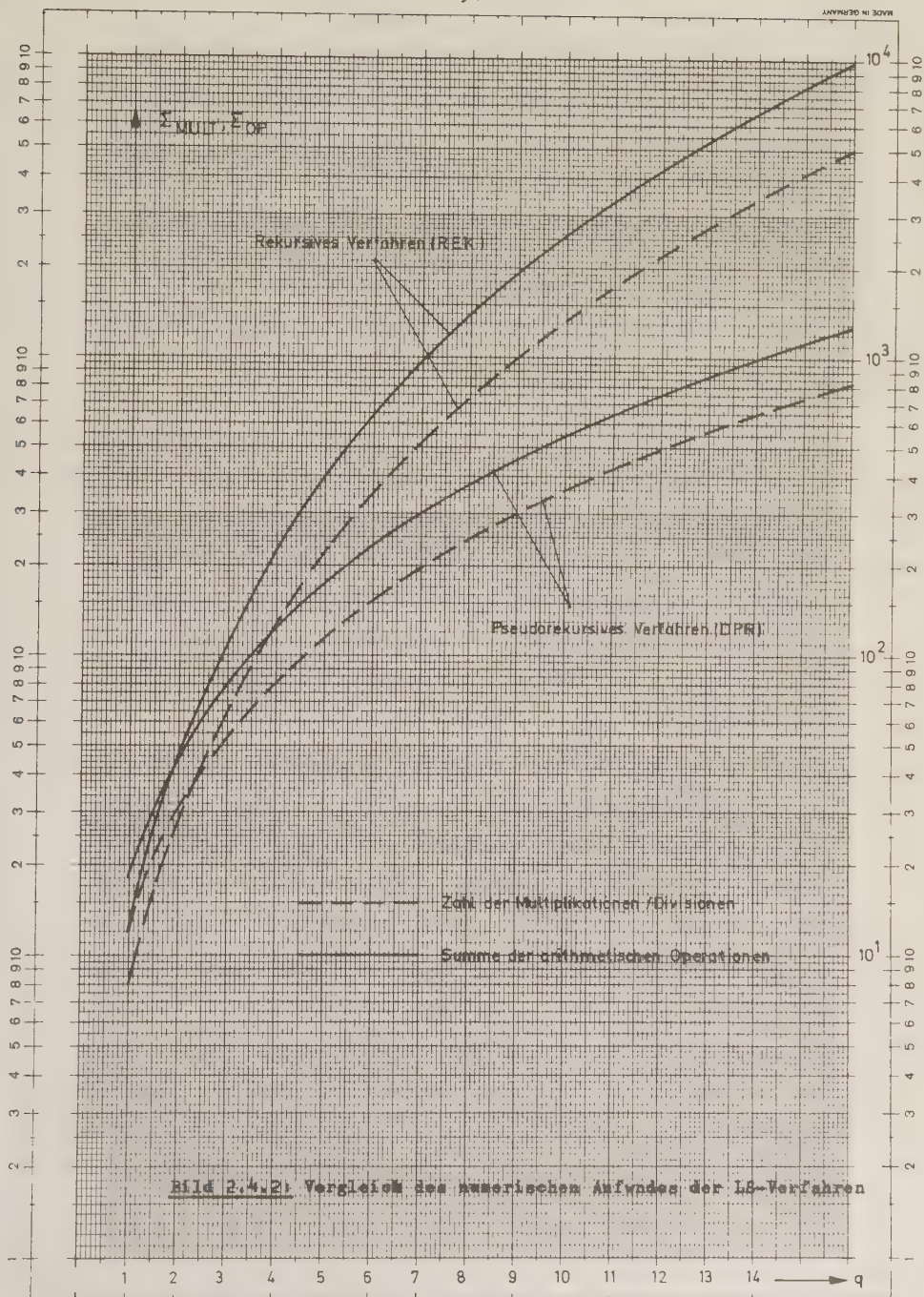
($N \times q$)-Matrizen $\underline{M}$ und $\underline{w}^T$ abgespeichert werden müssen, mit $N \gg q$.

Tabelle 2.4.3 zeigt weiterhin, daß der Speicherbedarf in Abhängigkeit von der Zahl q der gesuchten Kennwerte beim pseudorekursiven LS-Verfahren am geringsten ist. Beim IVA-Verfahren ist der i.a. geringe Speicherbedarf des Hilfsmodells in dieser Aufstellung nicht berücksichtigt.

Arithm. Operation	Rekursiv	Pseudorekursiv
Additionen	$q^3 + 2q^2 + q$	$\frac{3}{2}q^2 + \frac{7}{2}q$
Multiplikationen	$q^3 + 3q^2 + 4q$	$\frac{5}{2}q^2 + \frac{21}{2}q$
Wurzelberechnungen	-	q

Tabelle 2.4.4: Anzahl arithmetischer Operationen bei den LS-Verfahren

Vergleicht man weiterhin die Mindestzahl arithmetischer Operationen von rekursivem und pseudorekursivem LS-Verfahren für eine Rekursion nach beliebigem Abtastzeitpunkt, dann ergeben sich die in Tabelle 2.4.4 und im Bild 2.4.2 dargestellten Verhältnisse. Dabei sind Additionen und Subtraktionen zusammengefaßt, ebenso Multiplikationen und Divisionen. Es ist offensichtlich, daß der Vergleich mit wach-



sender Systemordnung immer deutlicher zugunsten des DPR-Verfahrens ausfällt. Damit ist die pseudorekursive Methode hinsichtlich numerischer Stabilität und numerischem Aufwand das effektivste numerische Verfahren der Least-squares-Methodik. Für die Hilfsvariablenmethode läßt sich zwar leicht ein analoges rekursives Verfahren angeben, nicht aber ein analoges pseudorekursives Verfahren.

2.4.4 Einfluß der endlichen Wortlänge

Nach der grundlegenden Definition der Empfindlichkeit einer Lösung $\underline{x}$ gegenüber Änderungen $\{\Delta \underline{A}, \Delta \underline{b}\}$ im System $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$, die in Gl. (2.4.21) und (2.4.24) formuliert wurde, wollen wir nun Abschätzungen für die Genauigkeit des zu erwartenden Identifizierungsergebnisses angeben, wenn die in der Praxis immer auftretenden numerischen Begrenzungen berücksichtigt werden. Solche, die Genauigkeit bestimmende Ursachen sind im wesentlichen: Fehler in den Eingabedaten, Rundungsfehler und Abbrechfehler.

Fehler in den Eingabedaten sind durch die Analog/Digital-Wandlung in der Übertragungskette Abtaster-Quantisierer-Halteglied bedingt, die die kontinuierlichen Prozeßsignale in die diskontinuierlichen, in der Stellenzahl begrenzten, Rechnereingangssignale umsetzt /41/. Rundungs- bzw. Abbrechfehler entstehen dadurch, daß für die interne Zahlendarstellung nur eine feste, endliche Anzahl n von Dualstellen zur Verfügung steht, die der Wortlänge entspricht.

Im weiteren wollen wir uns auf den internen Rundungsvorgang und auf die Realisierung der Zahlen in Gleitpunkt- oder Gleitkommadarstellung beschränken.

In der Gleitpunktdarstellung wird jede reelle Zahl x dual dargestellt durch

$$x = a \cdot 2^b \quad (2.4.63)$$

mit der Mantisse a und dem Exponenten b :

$$2^{-1} \leq |a| \leq 1, \quad b \text{ ganzzahlig} \quad (2.4.64)$$

Für die Darstellung von x stehen in der Maschine n Dualstellen zur Verfügung, t -Stellen für die Mantisse und e -Stellen für den Exponenten:

$$n = t + e \quad (2.4.65)$$

Definieren wir die Maschinenzahl $\tilde{x}$, die auf t -Mantissenstellen gerundet sei, dann gilt:

$$\tilde{x} = rd(x) = (x)_t = \text{sign}(x) |\tilde{a}| 2^b \quad (2.4.66)$$

$(x)_t$ ist demnach eine t -stellige Approximation der exakten Zahl x , wobei die Rundung der Mantisse wie folgt vorgenommen werde /2o/:

$$\text{Es sei} \quad |a| = 0.\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t \alpha_{t+1} \dots \quad (2.4.67)$$

$$\text{mit} \quad \alpha_i = 0 \text{ oder } 1, \quad \alpha_1 = 1.$$

Dann ist gerundet:

$$|\tilde{a}| = \begin{cases} 0.\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t & \text{falls } \alpha_{t+1} = 0 \\ 0.\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t + 2^{-t} & \text{falls } \alpha_{t+1} = 1 \end{cases} \quad (2.4.68)$$

Mit der Maschinengenauigkeit $\epsilon_{ps} = 2^{-t}$ gilt weiter:

$$\tilde{x} = rd(x) = (x)_t = x(1 + \epsilon) \quad \text{mit} \quad \epsilon \leq \epsilon_{ps} \quad (2.4.69)$$

und für den relativen Fehler von $\tilde{x}$ wird:

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| \leq \epsilon_{ps} = 2^{-t} \quad (2.4.70)$$

Summe und Produkt zweier t -stelliger Gleitkommazahlen liefern fol-

gende Rundungsfehler bei doppelt langem Akkumulator /36/,/39/:

$$(x_1 + x_2)_t = (x_1 + x_2)(1 + \varepsilon) \quad (2.4.71)$$

$$(x_1 * x_2)_t = (x_1 * x_2)(1 + \delta)$$

mit $|\varepsilon| \leq 2^{-t}, \quad |\delta| \leq 2^{-t} \quad (2.4.72)$

Bei einfach langem Akkumulator gilt dagegen:

$$(x_1 + x_2)_t = x_1(1 + \varepsilon_1) + x_2(1 + \varepsilon_2)$$

$$(x_1 * x_2)_t = (x_1 * x_2)(1 + \delta)$$

mit $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq \frac{3}{2} 2^{-t}, \quad |\delta| \leq 2^{1-t} \quad (2.4.73)$

Für die Multiplikation einer $(n \times n)$ -Matrix $\underline{A}$ mit einer skalaren Größe k gilt bei Gleitpunktarithmetik:

$$b_{ij} = \text{rd}(k a_{ij}) = k a_{ij}(1 + \varepsilon_{ij}) \quad (2.4.74)$$

mit $|\varepsilon_{ij}| \leq \text{eps} = 2^{-t}$.

Daher ist

$$b_{ij} - k a_{ij} = k a_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.4.75)$$

und bezüglich der Frobeniusnorm gilt:

$$\|\underline{B} - k\underline{A}\|_F \leq |k| 2^{-t} \|\underline{A}\|_F \quad (2.4.76)$$

Bezüglich der Spektralnrm gilt abgeschwächt nach Gl. (2.4.13):

$$\|\underline{B} - k\underline{A}\|_2 \leq |k| 2^{-t} n^{1/2} \|\underline{A}\|_2 \quad (2.4.77)$$

oder $\frac{\|\underline{B} - k\underline{A}\|_2}{|k| \|\underline{A}\|_2} \leq 2^{-t} n^{1/2} \quad (2.4.78)$

Für das Matrizenprodukt $\underline{A} \underline{B}$ ist entsprechend:

$$\underline{C} = \text{rd}(\underline{AB}) = \underline{AB} + \underline{F} \quad (2.4.79)$$

$$\frac{\|\underline{C} - \underline{AB}\|_F}{\|\underline{AB}\|_F} \leq 2^{-t}, \quad (2.4.80)$$

wenn akkumulierende Multiplikation der inneren Produkte und $n \ll 2^t$ angenommen wird.

Der Einfluß der endlichen Wortlänge soll nun allgemein bei der Lösung linearer Gleichungssysteme betrachtet werden, weiterhin bei den verschiedenen LS-Verfahren und schließlich bei der Identifizierung mittels Modellverfahren generell, also unabhängig von irgendwelchen numerischen Methoden.

Die Genauigkeit der Lösung eines linearen Gleichungssystems hängt von drei Faktoren ab, die im Zusammenhang betrachtet werden müssen, und zwar von der Struktur der Matrix, von der Stellenzahl t der Mantisse und von dem verwendeten Lösungsverfahren.

Wir wollen nun annehmen, daß die Struktur der Matrix und damit eine bestimmte Konditionszahl gegeben sei. Ferner setzen wir voraus, daß ein "gutartiges" Lösungsverfahren zur Verfügung stehe, dessen Algorithmus die einmal vorgegebene Konditionszahl nicht noch weiter verschlechtert, wie wir es ja von den orthogonalen Transformationsverfahren annehmen können. Dann läßt sich der Einfluß der endlichen Wortlänge direkt aus den Abschätzungen der Lösungsempfindlichkeit im System $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ gegenüber Änderungen in $\underline{A}$ und/oder $\underline{b}$ angeben. Bezüglich Änderungen in $\underline{b}$ war nach Gl. (2.4.21) mit

$$\underline{A} (\underline{x} + \Delta \underline{x}) = \underline{b} + \Delta \underline{b} \quad (2.4.81)$$

$$\frac{\|\Delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \|\underline{A}\| \|\underline{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} = \text{cond}(\underline{A}) \frac{\|\Delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \quad (2.4.82)$$

Entsprechend galt nach Gl.(2.4.24) für Änderungen in $\underline{A}$:

$$(\underline{A} + \Delta \underline{A})(\underline{x} + \Delta \underline{x}) = \underline{b} \quad (2.4.83)$$

$$\frac{\|\Delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(\underline{A})}{1 - \text{cond}(\underline{A}) \frac{\|\Delta \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|}} \frac{\|\Delta \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|} \quad (2.4.84)$$

Für das Runden der Elemente in der Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ auf t signifikante Stellen gilt dann entsprechend Gl. (2.4.74):

$$|\Delta a_{ij}| \leq 2^{-t} |a_{ij}|, \quad (2.4.85)$$

und bezüglich der Frobenius-Norm ist

$$\|\Delta \underline{A}\|_F \leq 2^{-t} \|\underline{A}\|_F \quad (2.4.86)$$

Aus Gl. (2.4.84) wird dann:

$$\frac{\|\Delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{2^{-t} \|\underline{A}\|_F \|\underline{A}^{-1}\|_F}{1 - 2^{-t} \|\underline{A}\|_F \|\underline{A}^{-1}\|_F} \quad (2.4.87)$$

Bei Benutzung der Spektralnrm gilt analog Gl. (2.4.77):

$$\|\Delta \underline{A}\|_2 \leq 2^{-t} n^{1/2} \|\underline{A}\|_2 \quad (2.4.88)$$

und damit weiterhin:

$$\frac{\|\Delta \underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \leq \frac{2^{-t} K_S(\underline{A}) n^{1/2}}{1 - 2^{-t} K_S(\underline{A}) n^{1/2}} \quad (2.4.89)$$

Um sicherzustellen, daß der Fehler $|\Delta \underline{x}|$ wesentlich kleiner als $|\underline{x}|$ bleibt, muß gelten:

$$2^{-t} K_S(\underline{A}) n^{1/2} \ll 1 \quad (2.4.90)$$

Bei Verwendung einer t -stelligen Gleitkommaarithmetik kann man daher

im allgemeinen keine auch nur näherungsweise richtige Lösung für ein Gleichungssystem angeben, wenn folgende Ungleichung gilt /36/:

$$K_S(\underline{A}) \geq n^{-1/2} 2^t \quad (2.4.91)$$

Gl. (2.4.91) macht deutlich, daß der qualitative Begriff "schlechte Kondition" immer bezüglich einer bestimmten Stellenzahl t zu sehen ist, und zwar unabhängig von irgendeinem Lösungsverfahren. Rein quantitativ vermittelt Tabelle 2.4.5 einen Einblick in die Größenordnung des Faktors 2^t bei Großrechenanlagen ($t = 38$ der TR 440), bei üblichen Prozeßrechnern und schließlich bei Kleinstrechnern.

t	38	24	16	12	8
2^t	$2.7 \cdot 10^{11}$	$1.7 \cdot 10^7$	$6.6 \cdot 10^4$	$4.1 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^2$

Tabelle 2.4.5: Größenordnung des Faktors 2^t

Für die explizite LS-Schätzung galt nach Gl. (2.2.94):

$$[\underline{M}^T \underline{M}] \hat{\underline{p}} = \underline{M}^T \underline{y} \quad (2.4.92)$$

und entsprechend für das direkte pseudorekursive LS-Verfahren:

$$\underline{M}^* \hat{\underline{p}} = \underline{y}_1^* \quad (2.4.93)$$

$$\text{mit } \underline{T} \underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{M}^* \\ \underline{0}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{T} \underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1^* \\ \underline{y}_2^* \end{bmatrix} \quad (2.4.94)$$

Aufgrund von Rundungsfehlern wird nun weder die berechnete Givens- oder Householder-Matrix $\underline{T}$ exakt orthogonal sein, noch werden die Beziehungen (2.4.93) und (2.4.94) mit der oberen Dreiecksmatrix $\underline{M}^*$

genau erfüllbar sein. Es wurde aber von Wilkinson gezeigt, daß das Orthogonalisierungsverfahren "gutartig" ist, d.h. die berechnete Lösung $\tilde{\underline{p}}$ läßt sich als exakte Lösung des folgenden linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{\underline{p}=\tilde{\underline{p}}} \|\underline{y} + \Delta\underline{y} - (\underline{M} + \Delta\underline{M}) \underline{p}\| \quad (2.4.95)$$

deuten, bei dem die Matrix $\underline{M} = \underline{M} + \Delta\underline{M}$ und die rechte Seite $\underline{y} = \underline{y} + \Delta\underline{y}$ nur leicht gegenüber $\underline{M}$ und $\underline{y}$ abgeändert sind /20/. Weiterhin gilt bis auf Glieder höherer Ordnung für $\underline{M}^*$:

$$\text{lub}(\underline{M}^*) = \text{lub}(\underline{M}) \quad (2.4.96)$$

Wird $\hat{\underline{p}}$ über die Normalgleichungen explizit nach Gl. (2.4.92) bestimmt, dann gilt für die Summe der Änderungen in $\underline{M}^T \underline{M}$ und $\underline{M}^T \underline{y}$:

$$(\underline{M}^T \underline{M} + \underline{F})(\hat{\underline{p}} + \Delta\hat{\underline{p}}) = \underline{M}^T \underline{y} + \Delta\underline{b} \quad (2.4.97)$$

Durch Zusammenfassen der Gl. (2.4.82) und (2.4.84) wird:

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta\hat{\underline{p}}\|}{\|\hat{\underline{p}}\|} &\leq \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) \left[\frac{\|\underline{F}\|}{\|\underline{M}^T \underline{M}\|} + \frac{\|\Delta\underline{b}\|}{\|\underline{M}^T \underline{y}\|} \right] \\ &\leq \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) \left[\frac{\text{lub}(\underline{F})}{\text{lub}(\underline{M}^T \underline{M})} + \frac{\|\Delta\underline{b}\|}{\|\underline{M}^T \underline{y}\|} \right] \end{aligned} \quad (2.4.98)$$

Daher gilt immer für das explizite LS-Verfahren:

$$\frac{\|\Delta\hat{\underline{p}}\|}{\|\hat{\underline{p}}\|} \sim \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) = \text{cond}(\underline{M})^2 \approx \text{cond}(\underline{M}^*)^2 \quad (2.4.99)$$

Rundungsfehler, durch die Matrix $\underline{F}$ repräsentiert, werden beim expliziten LS-Verfahren demnach in jedem Fall mit dem Faktor $\text{cond}(\underline{M}^*)^2$ verstärkt.

Für das pseudorekursive Verfahren wird in /20/ folgende, um den Einfluß von Rundungsfehlern erweiterte Abschätzung angegeben, ausgehend von Gl. (2.4.95):

$$\frac{\|\hat{\Delta \underline{p}}\|}{\|\hat{\underline{p}}\|} \leq \text{cond}(\underline{M}^*) \left[\frac{\text{lub}(\Delta \underline{M})}{\text{lub}(\underline{M})} + \frac{\|\underline{y}\|}{\text{lub}(\underline{M}) \|\hat{\underline{p}}\|} \frac{\|\Delta \underline{y}\|}{\|\underline{y}\|} \right] + \text{cond}(\underline{M}^*)^2 \frac{\|\underline{r}\|}{\text{lub}(\underline{M}) \|\hat{\underline{p}}\|} \frac{\text{lub}(\Delta \underline{M})}{\text{lub}(\underline{M})} \quad (2.4.100)$$

mit dem Residuum $\underline{r} = \underline{y} - \underline{M} \hat{\underline{p}}$. (2.4.101)

Der zweite Term der Abschätzung (2.4.100) überwiegt den ersten Klammerausdruck, wenn

$$\|\hat{\underline{p}}\| \leq \text{cond}(\underline{M}^*) \|\underline{r}\| / \text{lub}(\underline{M}) = \text{lub}(\underline{M}^{*-1}) \|\underline{r}\| \quad (2.4.102)$$

ist, oder gleichbedeutend, wenn folgende Ungleichung gilt:

$$\|\underline{y}\|^2 \leq 2 \|\underline{r}\|^2 \quad (2.4.103)$$

Dieser für große Konditionszahlen durchaus mögliche Fall zeigt, daß bei sehr kleiner Stellenzahl das DPR-Verfahren Rundungsfehler mit dem Faktor $\text{cond}(\underline{M}^*)^2$ verstärken kann, wie es beim expliziten Verfahren prinzipiell der Fall ist. Bei hinreichend großer Stellenzahl gilt aber im allgemeinen für das pseudorekursive Verfahren:

$$\frac{\|\hat{\Delta \underline{p}}\|}{\|\hat{\underline{p}}\|} \sim \text{cond}(\underline{M}^*) \approx \text{cond}(\underline{M})$$

(2.4.104)

Die bisherigen Abschätzungen dienen dazu, vergleichende Aussagen über die Empfindlichkeit der berechneten Kennwerte bei den einzelnen Verfahren machen zu können. Es soll nun noch die Frage erörtert werden, in welchem Maße Parameterungenauigkeiten aufgrund der

Rundungsfehler die Charakteristik des Systemmodells verändern.

Diese bei allen digitalen Filtern typische Erscheinung ist neben einer Anzahl weiterer Ursachen, die im Einzelnen in /39/ - /43/ behandelt werden, die zugleich gravierendste Fehlerquelle. Das angenommene Systemmodell hat nach Gl. (1.4.8) folgende z-Übertragungsfunktion:

$$G_M(z) = \frac{Y_M(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} \quad (2.4.105)$$

Infolge der Rundungsfehler in den Parametern a_i, b_i wird jedoch das Filter $\tilde{G}_M(z)$ realisiert:

$$\tilde{G}_M(z) = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{b}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i z^{-i}}, \quad (2.4.106)$$

mit $\tilde{a}_i = a_i + \Delta a_i, \quad \tilde{b}_i = b_i + \Delta b_i$

Man kann nun die Verschiebung der Pole und Nullstellen in der z-Übertragungsfunktion $\tilde{G}_M(z)$ gegenüber $G_M(z)$ bestimmen. Durch Bilden des totalen Differentials $\partial z_i / \partial a_k$ für $z^{-1} = z_i$ erhält man für die Verschiebung der als einfach vorausgesetzten Pole $\tilde{z}_i$ von $\tilde{G}_M(z)$, mit $\tilde{z}_i = z_i + \Delta z_i, \quad i = 1, \dots, n$ /39/, /42/:

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^n \frac{z_i^{k+1}}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (1 - z_i/z_j)} \Delta a_k \quad (2.4.107)$$

Bei einem Filter mit vorgegeben, konstanten Parametern $\{a_i, b_i\}$ ist:

$$\tilde{a}_k = a_k (1 + \varepsilon_k) = a_k + \Delta a_k$$

oder $\Delta a_k = a_k \varepsilon_k \quad \text{mit} \quad |\varepsilon_k| \leq 2^{-t} \quad (2.4.108)$

In diesem Falle ist die Polverschiebung nach Gl. (2.4.107) den Rundungsfehlern direkt zugeordnet.

Näherungsweise läßt sich aber auch ein absolutes Stabilitätsmaß in Abhängigkeit von der Stellenzahl t angeben. Nach Gl. (2.4.105) ist:

$$G_M(z) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} = \frac{Z_M(z)}{N_M(z)} = \frac{Z_M(z)}{\prod_{k=1}^n (1 - z^{-1}/z_k)} \quad (2.4.109)$$

Um die Stabilität des Systemmodells sicherzustellen, ist es notwendig, daß sämtliche Pole des Nennerausdruckes von $G_M(z)$

$$N_M(z) = \prod_{k=1}^n (1 - z^{-1}/z_k) \quad (2.4.110)$$

innerhalb des Einheitskreises (EX) der z -Ebene liegen. Aus dieser Bedingung ergibt sich sofort ein Maß für die notwendige Genauigkeit der Parameter a_i .

Für die weiteren Ausführungen wird vorausgesetzt, daß das Filter $G_M(z)$ Tiefpaßcharakter hat und nur einfache Pole besitzt /42/, /44/.

Dann gilt gemäß der Standard- z -Transformation auch:

$$N_M(z) = \prod_{k=1}^n (1 - e^{s_k T_0} z^{-1}) \quad , \quad (2.4.111)$$

wobei s_k der k -te Pol von $G_M(s)$ ist. Nimmt man weiterhin an, daß die Abtastfrequenz $f_0 = 1/T_0$ mindestens dem doppelten Wert der höchsten Eckfrequenz entspricht, und bezieht man die Eckfrequenzen auf die sog. Nyquist-Frequenz $f_n = f_0/2$, dann ist:

$$\mu_k = s_k / \omega_n = s_k T_0 / \pi \quad (2.4.112)$$

$$\text{mit} \quad \omega_n = \omega_0/2 = \pi f_0 = \pi / T_0 \quad (2.4.113)$$

Normalerweise ist $|\mu_k| < 1$, und für $T \rightarrow 0$ gilt:

$$(1 - e^{s_k T_0} z^{-1}) \longrightarrow (1 - (1 + \mu_k \pi) z^{-1}) \quad (2.4.114)$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken von Gl. (2.4.110) ergibt für kleine Abtastperioden T_0 :

$$z_k \approx \frac{1}{1 + \mu_k \pi} \approx 1 - \mu_k \pi \quad (2.4.114)$$

An der Stabilitätsgrenze gilt dann:

$$N_M(z) \Big|_{z=1} \approx \prod_{k=1}^n (\mu_k \pi) = \prod_{k=1}^n (a_k T_0) \quad (2.4.115)$$

und nach Gl. (2.4.109):

$$N_M(z) \Big|_{z=1} = 1 + \sum_{k=1}^n a_k = F_0 \quad (2.4.116)$$

Der mit F_0 abgekürzte Ausdruck von Gl. (2.4.116) gibt die Größe der Änderungen in den Parametern a_k an, damit ein Pol von $G_M(z)$ gerade an der Stabilitätsgrenze liegt. Bei größeren Änderungen wandert zumindest eine Nullstelle von $N_M(z)$ in das Äußere des EK und das Filter wird instabil. Gl. (2.4.116) ist daher eine Schranke für die notwendige Parametergenauigkeit eines stabilen Filters.

Eine verbesserte Schranke für die Koeffizientengenauigkeit wird in /42/ angegeben, wobei die Tatsache berücksichtigt wird, daß für $T_0 \rightarrow 0$ die Koeffizienten a_k mit alternierenden Vorzeichen gegen die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ wandern.

Diese verbesserte Schranke erhält man durch Division von F_0 durch den betragsgrößten Koeffizienten $\hat{a}_k$ aus $N_M(z)$, wobei für $\hat{a}_k$ näherungsweise gilt:

$$\hat{a}_k \approx \binom{n}{n/2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx \frac{4}{5} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \quad (2.4.117)$$

Damit ist die gesuchte Fehlerschranke mit Gl. (2.4.115):

$$\frac{F_0}{\hat{a}_k} \approx \frac{5 \sqrt{n}}{2^{n+2}} \prod_{k=1}^n (a_k T_0) \quad (2.4.118)$$

Aus Gl. (2.4.118) wird deutlich, daß die Fehlerschranke sowohl von der Filterordnung n als auch von der Abtastperiode T_0 abhängt. Betrachten wir nur den relativen Fehler ε , der durch die t -stellige Darstellung von konstanten Filterparametern entsteht, dann ist nach Gl. (2.4.69):

$$|\varepsilon| = F_0 / \hat{a}_k \leq \varepsilon_{ps} = 2^{-t} \quad (2.4.119)$$

Damit ergibt sich als notwendige Stellenzahl t für Filterstabilität:

$$t > [-\ln(F_0 / \hat{a}_k)] = [-\ln \left\{ \frac{5\sqrt{n}}{2^{n+2}} \prod_{k=1}^n (a_k T_0) \right\}] \quad (2.4.120)$$

wobei der in eckigen Klammern stehende Ausdruck auf die kleinste ganze Zahl aufzurunden ist.

Gl. (2.4.120) berücksichtigt allerdings nicht die Fehlerfortpflanzung im Zuge der Filterrealisierung. Andererseits werden dem Systemmodell $G_M(z)$ keine festen Parameter eingegeben, diese sind erst numerisch zu bestimmen. Gehen wir von erwartungstreuen Schätzwerten $\hat{p}$ aus, dann ist nach Gl. (2.4.89) der Schätzfehler gegeben durch:

$$\frac{\|\Delta \hat{p}\|}{\|\hat{p}\|} \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \quad (2.4.121)$$

$$\text{mit} \quad \delta = 2^{-t} K_S(\underline{A}) q^{1/2} \quad (2.4.122)$$

und dem repräsentativen Ausdruck $\underline{A}$ für die charakteristischen Matrizen der einzelnen Verfahren. Analog Gl. (2.4.119) ist weiter:

$$F_0 / \hat{a}_k \leq \delta / (1 - \delta) \quad (2.4.123)$$

$$\text{oder} \quad \delta \geq \frac{F_0 / \hat{a}_k}{1 + F_0 / \hat{a}_k} \approx F_0 / \hat{a}_k \quad (2.4.124)$$

Mit Gl. (2.4.122) ist dann die in diesem Falle notwendige Stellenzahl:

$$t > [-\ln (F_o / \hat{a}_k) + \ln (K_S(\underline{A})) + 1/2 \ln (q)] \quad (2.4.125)$$

Aus dieser gegenüber Gl. (2.4.120) erweiterten Form wird die große Bedeutung der Konditionszahl $K_S(\underline{A}) = \text{cond}(\underline{A})$ auch hinsichtlich der benötigten Stellenzahl bei allen Parameterschätzverfahren deutlich. Bei vorgegebener Stellenzahl sollte dann nach Gl. (2.4.125) die Ordnung des Systemmodells möglichst niedrig sein und die Abtastzeit nicht zu klein gewählt werden, um die Stabilität des Modells zu gewährleisten. Diese Forderungen werden auch hinsichtlich einer niedrigen Konditionszahl gestellt, die darüberhinaus aber wesentlich durch das benutzte numerische Verfahren bestimmt wird.

Um einen Einblick in die Größenordnung der benötigten Stellenzahl t der Mantisse zu gewinnen, seien einige Zahlenwerte angegeben.

Für die drei, im Kapitel 5 beschriebenen Simulationsprozesse ist der Wert $t_1 = -\ln (F_o / \hat{a}_k)$:

Prozeß I	$(T_o = 2 \text{ sec})$	$t_1 = 3$
Prozeß II	$(T_o = 2 \text{ sec})$	$t_1 = 4$
Prozeß III	$(T_o = 0.1 \text{ sec})$	$t_1 = 6$

Die Größenordnung von $t_2 = \ln (K_S(\underline{A}))$ geht aus Tabelle 2.4.5 hervor.

$K_S(\underline{A})$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^8
$\ln K_S(\underline{A})$	2.3	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8	18.4

Tabelle 2.4.5: Wortlänge als Funktion der Konditionszahl

In realen Fällen muß man auch bei sehr stabilen Prozessen mit

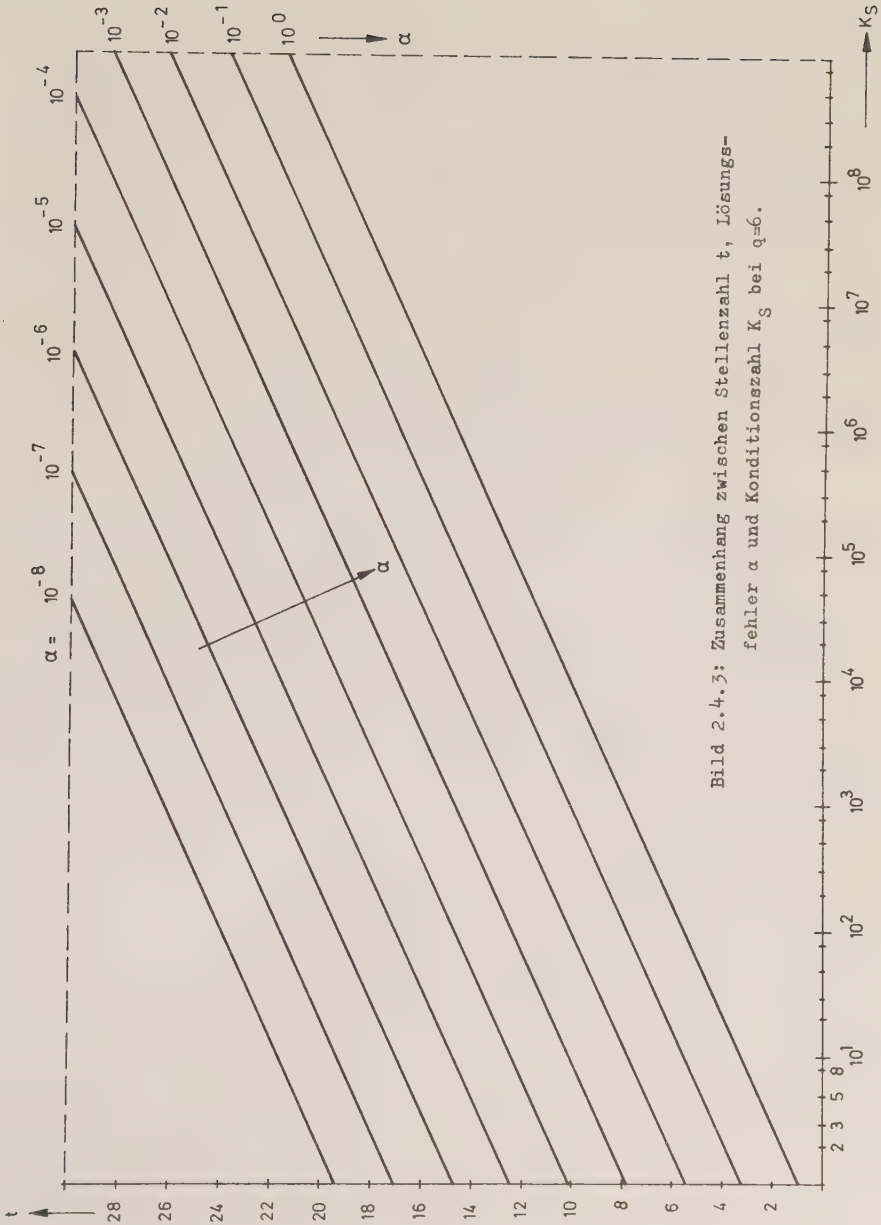


Bild 2.4.3: Zusammenhang zwischen Stellenzahl t , Lösungsfehler α und Konditionszahl K_S bei $q=6$.

Konditionszahlen von $10^3 - 10^4$ rechnen, so daß für sinnvolle Parameterschatzerggebnisse nach Gl. (2.4.125) Wortlängen von mindestens 12 - 14 Mantissenstellen benötigt werden.

Verlangt man von einem Parameterschätzverfahren nicht nur die Stabilität des berechneten Filters, sondern eine Modellbestimmung mit vorzugebender Genauigkeit, beispielsweise mit

$$\|\hat{\Delta}_{\hat{p}}\| = \alpha \|\hat{p}\|, \quad (2.4.126)$$

dann ist α ein einfaches Maß für den relativen Lösungsfehler. Mit Gl. (2.4.121) und Gl. (2.4.122) wird dann aus Gl. (2.4.125):

$$t > [-\ln(\alpha) + \ln(K_S(\underline{A})) + 1/2 \ln(q)] . \quad (2.4.127)$$

Mit dieser Abschätzung erhalten wir einen einfachen Zusammenhang zwischen der Wortlänge, Konditionszahl, der Modellordnung und zugehöriger Modellgenauigkeit. Für ein Systemmodell 3. Ordnung ist dieser Zusammenhang im Bild 2.4.3 dargestellt, wobei für vorgegebene Konditionszahl und Genauigkeit die erforderliche Stellenzahl t auf die nächstgrößere ganze Zahl aufzurunden ist.

3. Ableitung des neuen numerischen Verfahrens

Wir nehmen zunächst an, es seien bereits Hilfsvariablen über ein geeignetes Hilfsmodell nach den in Kapitel 2.3 definierten Bedingungen gewonnen worden, und diese seien in der Hilfswertmatrix $\underline{W}$ gemäß Gl. (2.3.6) angeordnet:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} -\underline{W}_y & \underline{M}_u \end{bmatrix} . \quad (3.1)$$

Die Folge von Hilfsvariablen $\{y_H(k)\}$ wird wieder als Schätzung des unverrauschten Systemausgangs gewonnen:

$$y_H(k) = \hat{z}(k) \quad (3.2)$$

Entsprechend sei die Anordnung der Meßwerte in der Meßwertmatrix $\underline{M}$ gegeben durch Gl. (2.3.6):

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} -\underline{M}_y & \underline{M}_u \end{bmatrix} . \quad (3.3)$$

Damit ergab sich die Schätzgleichung (2.3.2) des Hilfsvariablenverfahrens:

$$\hat{\underline{p}} = \left[\underline{W}^T \underline{M} \right]^{-1} \underline{W}^T \underline{y} \quad (3.4)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\left[\underline{W}^T \underline{M} \right]$ von links führte auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\underline{W}^T \begin{bmatrix} q \times N \end{bmatrix} \underline{M} \begin{bmatrix} N \times q \end{bmatrix} \hat{\underline{p}} \begin{bmatrix} q \times 1 \end{bmatrix} = \underline{W}^T \begin{bmatrix} q \times N \end{bmatrix} \underline{y} \begin{bmatrix} N \times 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

mit $q = 2n$ und $N \geq q$

Die zur Bestimmung des gesuchten Parametervektors $\hat{\underline{p}}$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $k \geq T_0$ notwendige Information steckt vollständig in den Matrizen $\underline{W}^T$, $\underline{M}$ und im Vektor $\underline{y}$. Bei N Meßwerten mit $N \gg q$ ist die Bildung der Matrizenprodukte $\underline{W}^T \underline{M}$ und $\underline{W}^T \underline{y}$ aus den Einzel-

matrizen eine äußerst aufwendige Operation, die sich durch rekursive Datenreduktion umgehen läßt. Durch Zusammenfassen erhält man zunächst die reduzierte Matrix $[\underline{W}^T \underline{M}]$ und den reduzierten Vektor $[\underline{W}^T \underline{Y}]$:

$$[\underline{W}^T \underline{M}]_{[qxq]} \hat{P}_{[qx1]} = [\underline{W}^T \underline{Y}]_{[qx1]} \quad (3.6)$$

Zur Kennzeichnung zusammengefaßter Matrixausdrücke wollen wir diese gemeinsam unterstreichen. Es ist dann:

$$[\underline{W}^T \underline{M}] = \underline{W}^T \underline{M}, \quad [\underline{W}^T \underline{Y}] = \underline{W}^T \underline{Y} \quad (3.7)$$

Die Ordnung dieser reduzierten Matrizen $\underline{W}^T \underline{M}$ und $\underline{W}^T \underline{Y}$ wird jetzt nur noch von der Systemordnung n bzw. von der Anzahl der unbekannten Parameter $q = 2n$ bestimmt und nicht mehr von der Anzahl N der Meßwerte. Mit den Definitionen (2.2.18) und (2.3.6) für Meßwertmatrix und Hilfswertmatrix ergibt sich:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{m}^T(n+1) \\ \underline{m}^T(n+2) \\ \vdots \\ \underline{m}^T(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) \dots \dots \dots -y(1) & | & u(n) \dots \dots \dots u(1) \\ -y(n+1) \dots \dots \dots -y(2) & | & u(n+1) \dots \dots \dots u(2) \\ \vdots & & \vdots \\ -y(n+N-1) \dots \dots -y(N) & | & u(n+N-1) \dots \dots u(N) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{w}^T(n+1) \\ \underline{w}^T(n+2) \\ \vdots \\ \underline{w}^T(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_H(n) \dots \dots \dots -y_H(1) & | & u(n) \dots \dots \dots u(1) \\ -y_H(n+1) \dots \dots \dots -y_H(2) & | & u(n+1) \dots \dots \dots u(2) \\ \vdots & & \vdots \\ -y_H(n+N-1) \dots \dots -y_H(N) & | & u(n+N-1) \dots \dots u(N) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Die reduzierten Ausdrücke sind wie folgt darstellbar:

$$\begin{aligned} \underline{W^T M} &= \begin{bmatrix} -\underline{W}_y & \underline{M}_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\underline{M}_y & \underline{M}_u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{W}_y^T \underline{M}_y & -\underline{W}_y^T \underline{M}_u \\ -\underline{M}_u^T \underline{M}_y & \underline{M}_u^T \underline{M}_u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \underline{W^T y} &= \begin{bmatrix} -\underline{W}_y & \underline{M}_u \end{bmatrix}^T \underline{y} \\ &= \begin{bmatrix} -\underline{W}_y^T \underline{y} \\ \underline{M}_u^T \underline{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ausführlich gilt bei N Meßwerten:

$$\underline{W^T M} = \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{N-1} y_H(n+t) y(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} y_H(n+t) y(1+t) & \sum_{t=0}^{N-1} y_H(n+t) u(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} y_H(n+t) u(1+t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=0}^{N-1} y_H(1+t) y(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} y_H(1+t) y(1+t) & \sum_{t=0}^{N-1} y_H(1+t) u(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} y_H(1+t) u(1+t) \\ \hline \sum_{t=0}^{N-1} u(n+t) y(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} u(n+t) y(1+t) & \sum_{t=0}^{N-1} u(n+t) u(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} u(n+t) u(1+t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=0}^{N-1} u(1+t) y(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} u(1+t) y(1+t) & \sum_{t=0}^{N-1} u(1+t) u(n+t) & \cdots & \sum_{t=0}^{N-1} u(1+t) u(1+t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_{\underline{y}}^T = \begin{bmatrix} -\sum_{t=0}^{N-1} y_H(n+t)y(n+1+t) \\ \vdots \\ -\sum_{t=0}^{N-1} y_H(1+t)y(n+1+t) \\ \hline \sum_{t=0}^{N-1} u(n+t)y(n+1+t) \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^{N-1} u(1+t)y(n+1+t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{W}_{\underline{y}}^T \underline{y} \\ \hline \underline{M}_{\underline{u}}^T \underline{y} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Die in der Ordnung reduzierte Matrix $\underline{W}_{\underline{M}}^T$ und der Vektor $\underline{W}_{\underline{y}}^T$ enthalten die vollständige Information zur Lösung des Gleichungssystems

$$\boxed{\underline{W}_{\underline{M}}^T \hat{\underline{p}} = \underline{W}_{\underline{y}}^T} \quad (3.14)$$

aufgrund von N Messungen, wobei $N \geq q$ ist und $\underline{W}_{\underline{M}}^T$ als nichtsingulär vorausgesetzt wird:

$$\text{Rang} (\underline{W}_{\underline{M}}^T) = q \quad (3.15)$$

Kommt eine weitere (N+1)-te Messung hinzu, dann ändern sich sämtliche Elemente von $\underline{W}_{\underline{M}}^T$ und $\underline{W}_{\underline{y}}^T$, da die oberen Summationsgrenzen in Gl. (3.12) und (3.13) von N-1 auf N angehoben werden. Damit läßt sich folgendes Gesetz zum rekursiven Aufbau von $\underline{W}_{\underline{M}}^T$ und $\underline{W}_{\underline{y}}^T$ angeben:

$$\begin{aligned} \underline{W}_{\underline{M}}^T(k+1) &= \underline{W}_{\underline{M}}^T(k) + \Delta \underline{W}_{\underline{M}}^T(k+1) \\ \underline{W}_{\underline{y}}^T(k+1) &= \underline{W}_{\underline{y}}^T(k) + \Delta \underline{W}_{\underline{y}}^T(k+1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit den Korrekturtermen:

$$\Delta \underline{W}^T \underline{M}(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} \Delta \underline{W}_{\underline{y}}^T \underline{M}_{\underline{y}}(k+1) & -\Delta \underline{W}_{\underline{y}}^T \underline{M}_{\underline{u}}(k+1) \\ \hline -\Delta \underline{M}_{\underline{u}}^T \underline{M}_{\underline{y}}(k+1) & \Delta \underline{M}_{\underline{u}}^T \underline{M}_{\underline{u}}(k+1) \end{array} \right] \quad (3.17)$$

$$\Delta \underline{W}^T \underline{y}(k+1) = \left[\begin{array}{c} -\Delta \underline{W}_{\underline{y}}^T \underline{y}(k+1) \\ \hline \Delta \underline{M}_{\underline{u}}^T \underline{y}(k+1) \end{array} \right] \quad (3.18)$$

Nach den in Kapitel 2.2 und 2.3 getroffenen Definitionen gilt zu jedem Zeitpunkt $k \geq 0$:

$$\underline{m}^T(k) = \left[-\underline{m}_{\underline{y}}^T(k) \mid \underline{m}_{\underline{u}}^T(k) \right] \quad (3.19)$$

$$\underline{v}^T(k) = \left[-\underline{v}_{\underline{y}}^T(k) \mid \underline{v}_{\underline{u}}^T(k) \right] \quad (3.20)$$

mit $\underline{m}_{\underline{y}}^T(k) = [y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)]$

$$\underline{m}_{\underline{u}}^T(k) = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n)]$$

$$\underline{v}_{\underline{y}}^T(k) = [y_H(k-1), y_H(k-2), \dots, y_H(k-n)] \quad (3.21)$$

Damit ergeben sich die Korrekturterme zu:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{W}^T \underline{M}(k+1) &= \underline{w}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \\ \Delta \underline{W}^T \underline{y}(k+1) &= \underline{w}(k+1) \underline{y}(k+1) \end{aligned}$$

(3.22)

Ordnet man die Matrix $\underline{W}^T \underline{M}$ und den Vektor $\underline{W}^T \underline{y}$ wie folgt in der Matrix $\underline{Z}_H$ an:

$$\underline{Z}_H = \left[\begin{array}{c|c} \underline{W}^T \underline{M} & -\underline{W}^T \underline{y} \end{array} \right] , \quad (3.23)$$

dann wird aus Gl. (3.14):

$$\underline{z}_H(k) \hat{\underline{p}}_1(k) = \underline{0} \quad (3.24)$$

mit
$$\hat{\underline{p}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\underline{p}} \\ - \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Entsprechend Gl. (3.16) gilt weiter:

$$\underline{z}_H(k+1) = \underline{z}_H(k) + \Delta \underline{z}_H(k+1) \quad , \quad (3.26)$$

mit dem Korrekturausdruck:

$$\Delta \underline{z}_H(k+1) = \underline{w}(k+1) \underline{z}^T(k+1)$$

(3.27)

wobei $\underline{z}^T(k+1)$ nach Gl. (2.2.130) definiert ist:

$$\underline{z}^T(k+1) = \left[\underline{m}^T(k+1) \mid -\underline{y}(k+1) \right] \quad (3.28)$$

Die Korrekturmatrix $\underline{z}_H(k+1)$ ergibt sich demnach durch einfache Multiplikation des q -Vektors $\underline{w}(k+1)$ mit dem $(q+1)$ -Vektor $\underline{z}^T(k+1)$.

Als Startwerte ist in Gl. (3.26) vorzugeben:

$$\underline{z}_H(0) = \left[\underline{w}^T M(0) \mid -\underline{w}^T \underline{y}(0) \right] = \underline{0} \quad (3.29)$$

Durch dieses sehr einfache, aber exakte Bildungsgesetz wird nur noch die Speicherung der $(q \times q)$ -Matrix $\underline{w}^T M$ und des q -Vektors $\underline{w}^T \underline{y}$ notwendig gegenüber der Abspeicherung der $(N \times q)$ -Matrizen $\underline{w}, M$ und des N -Vektors $\underline{y}$ in der allgemeinen Form von Gl. (3.5), wobei wir annehmen können, daß bei verrauschten Prozessen das Meßintervall $N \gg q$ gewählt werden muß. Durch den rekursiven Aufbau der Matrizen $\underline{w}^T M$ und $\underline{w}^T \underline{y}$ beschreibt Gl. (3.14) zu jedem beliebigen Meßzeitpunkt ein genau bestimmtes Gleichungssystem mit im allgemeinen unsymme-

trischer Matrix $\underline{W}^T \underline{M}$. Die unbekannten Modellparameter in $\hat{\underline{p}}$ können dann mit Hilfe eines der bekannten Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme bestimmt werden, wobei wir eindeutige Lösungen der Schätzgleichung $\underline{W}^T \underline{M} \hat{\underline{p}} = \underline{W}^T \underline{y}$ erhalten, wenn

$$N \geq q, \quad \text{Rang}(\underline{W}^T \underline{M}) = q \quad \text{und} \quad \underline{W}^T \underline{M} \text{ gut konditioniert}$$

ist. Zur Bestimmung von $\hat{\underline{p}}$ wählen wir zweckmäßigerweise das Verfahren mit dem geringsten numerischen Aufwand, das Gauß'sche Eliminationsverfahren /34/,/37/. Dann wollen wir den gesamten Vorgang des rekursiven Aufbaus von $\underline{Z}_H$ und anschließender Lösung von Gl. (3.14) mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus als universell explizites Schätzverfahren bezeichnen, abgekürzt UVEX, da es Schätzwerte $\hat{\underline{p}}$ zu beliebigen Zeitpunkten zu liefern vermag und somit explizit wie auch rekursiv verwandt werden kann. Der wesentliche Vorteil des UVEX-Verfahrens gegenüber der rekursiven Form liegt darin, daß die Konvergenz des Verfahrens nicht mehr von der Wahl bestimmter Startwerte abhängig ist, da nach Gl. (3.29) lediglich eine Nullmatrix vorzugeben ist.

Numerischer Aufwand	Rekursiv	Universell explizit
Speicherplätze	$2q^2 + 5q$	$2q^2 + 5q$
Additionen	$q^3 + 2q^2 + q$	$\frac{1}{3}q^3 + 2q^2 + \frac{2}{3}q$
Multiplikationen	$q^3 + 3q^2 + 4q$	$\frac{1}{3}q^3 + 2q^2 + \frac{5}{3}q$
Arithm. Operationen	$2q^3 + 5q^2 + 5q$	$\frac{2}{3}q^3 + 4q^2 + \frac{7}{3}q$

Tabelle 3.1: Numerischer Aufwand verschiedener IVA-Verfahren

Vergleicht man den numerischen Aufwand von rekursivem und universell explizitem IVA-Verfahren, wie dies in Tabelle 3.1 und in den Bildern 3.6 bzw. 3.7 dargestellt ist, dann wird ein weiterer Vorteil des UVEX-Verfahrens deutlich: Bei gleichem Speicherplatzbedarf benötigt es prinzipiell weniger Rechenzeit als das rekursive Verfahren.

Die Ableitung des UVEX-Verfahrens erfolgte für die statistische Hilfsvariablenmethode. Man kann nun dieses Verfahren auch zur Least-squares-Schätzung (LS-UVEX) verwenden, wenn in Gl. (3.27) der Hilfswertvektor $\underline{w}(k+1)$ durch den entsprechenden Meßwertvektor $\underline{m}(k+1)$ ersetzt wird. Gegenüber dem direkten pseudorekursiven Verfahren (LS-DPR) mit der charakteristischen Dreiecksmatrix $\underline{M}^*$ führt dies jedoch zu keinem Vorteil, wie aus dem Vergleich der Konditionszahlen nach Gl. (2.4.56) und (2.4.60) hervorgeht.

$$\text{cond}(\underline{w}^T \underline{M}) \geq \text{cond}(\underline{m}^T \underline{M}) > \text{cond}(\underline{M}) = \text{cond}(\underline{M}^*) \quad (3.30)$$

Die Kondition des IVA-UVEX-Verfahrens mit der charakteristischen Matrix $\underline{w}^T \underline{M}$ ist nach Gl. (3.30) im allgemeinen schlechter als die des expliziten oder universell expliziten LS-Verfahrens, repräsentiert durch die Matrix $\underline{m}^T \underline{M}$, und sie ist immer schlechter als die Kondition des LS-DPR-Verfahrens. Andererseits haben explizites (IVA-EXP), rekursives (IVA-REK) und universell explizites (IVA-UVEX) Hilfsvariablenverfahren die gleiche Konditionszahl.

In dieser gegenüber den LS-Verfahren schlechteren Kondition und in der Tatsache, daß die Koeffizientenmatrix $\underline{w}^T \underline{M}$ im allgemeinen indefinit ist, liegen die Hauptschwächen aller numerischen Hilfsvariablenverfahren. Hinzu kommt in der rekursiven Form noch die Schwierigkeit, geeignete Startwerte finden zu müssen.

Ausgehend vom UVEX-Verfahren soll im weiteren die Frage erörtert

werden, wie sich diese vorgegebene Kondition verbessern läßt. Es wird dann ein Verfahren abgeleitet, das sich durch günstigere Konditionszahlen auszeichnet und weiterhin einem Lösungsverfahren für positiv definite Koeffizientenmatrizen gleichkommt.

3.1 Konditionsverbesserung

In den Ausführungen von Kapitel 2.4.4 ist deutlich geworden, daß für die Eindeutigkeit und Genauigkeit der numerischen Lösung $\underline{x}$ eines Gleichungssystems $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ die Konditionszahl $\text{cond}(\underline{A})$ von zentraler Bedeutung ist, wenn man von einer vorgegebenen Wortlänge ausgeht. Andererseits wird $\text{cond}(\underline{A})$ durch die Formulierung der Schätz- aufgabe festgelegt, wobei $\underline{A}$ einen bestimmten Matrizenausdruck verkörpert. Um nun Möglichkeiten zur Konditionsverbesserung aufzuzeigen, werden als Grundlage der weiteren Ausführungen einige Sätze zur Lösung des Least-squares-Problem vorangestellt, deren Beweis nach /26/ im Anhang A2 ausgeführt ist.

Wir gehen von folgender allgemeinen, reellen Form aus:

$$\underline{A}_{[m \times n]} \underline{x}_{[n \times 1]} = \underline{b}_{[m \times 1]} \quad (3.1.1)$$

mit $\text{Rang}(\underline{A}) = r, \quad 0 < r \leq \min(m, n) \quad (3.1.2)$

Dann lassen sich immer Matrizen $\underline{U}_{[m \times r]}$, $\underline{S}_{[r \times r]}$ und $\underline{V}_{[n \times r]}$ finden, sodaß gilt:

$$\underline{A} = \underline{U} \underline{S} \underline{V}^T \quad (3.1.3)$$

Die Matrizen $\underline{U}$ und $\underline{V}$ sind orthonormal, d.h.

$$\underline{U}^T \underline{U} = \underline{I}_{[r]} \quad \underline{V}^T \underline{V} = \underline{I}_{[r]} \quad (3.1.4)$$

Die Diagonalmatrix $\underline{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_r) \quad (3.1.5)$

hat Diagonalelemente $s_1, s_2, \dots, s_r$, die der Größe nach angeordnet seien:

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0 \quad (3.1.6)$$

Diese skalaren Größen s_i sind die von Null verschiedenen singulären Werte der Matrix $\underline{A}$. Dann ist s_1 der größte und s_r der kleinste singuläre Wert. Mit

$$\underline{A}^T = \underline{V} \underline{S} \underline{U}^T \quad (3.1.7)$$

$$\text{und} \quad \text{lub}(\underline{U}) = \text{lub}(\underline{V}) = 1 \quad (3.1.8)$$

folgt bezüglich der Spektralnorm:

$$\|\underline{A}\| = \|\underline{A}\|_2 = \|\underline{A}^T\| = \|\underline{S}\| = s_1 \quad (3.1.9)$$

Nach Gl. (2.2.24) ist der Vektor

$$\underline{x} = \underline{A}^+ \underline{b} \quad (3.1.10)$$

die eindeutige Lösung "minimaler Länge" von Gl. (3.1.1) im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Dabei ist die Pseudoinverse $\underline{A}^+$ für $m \geq n$ wie folgt definiert:

$$\underline{A}^+ = \left[\underline{A}^T \underline{A} \right]^{-1} \underline{A}^T \quad (3.1.11)$$

$$\text{mit} \quad \underline{A}^+ \underline{A} = \underline{I}_{[n]} \quad \text{und} \quad \text{Rang}(\underline{A}) = r = n \quad (3.1.12)$$

Bei Berücksichtigung von Gl. (3.1.3) und (3.1.7) ist

$$\underline{A}^T \underline{A} = \underline{V} \underline{S}^2 \underline{V}^T \quad (3.1.13)$$

$$\|\underline{A}^T \underline{A}\| = \|\underline{S}^2\| = s_1^2, \quad (3.1.14)$$

und daher wird aus Gl. (3.1.11):

$$\underline{A}^+ = \underline{V} \underline{S}^{-1} \underline{U}^T \quad (3.1.15)$$

$$\|\underline{A}^+\| = \|\underline{S}^{-1}\| = s_r^{-1} \quad (3.1.16)$$

Weiterhin gilt:

$$\text{cond}(\underline{A}) = \|\underline{A}\| \|\underline{A}^+\| = \text{cond}(\underline{A}^T) = \text{cond}(\underline{A}^+) \quad (3.1.17)$$

$$K_S(\underline{A}) = \text{cond}(\underline{A}) = s_1/s_r \quad (3.1.18)$$

Bezüglich der charakteristischen Größen Kondition und Rang der Matrix $\underline{A}$ lassen sich dann folgende Aussagen treffen:

Satz 3.1: Ist $\underline{A}$ eine $(m \times n)$ -Matrix vom Rang $r = n$ und $\underline{H}$ eine $(n \times q)$ -Matrix, mit $\underline{H}^T \underline{H} = \underline{I}_{[q]}$, dann gilt wegen $\|\underline{A} \underline{H}\| \leq \|\underline{A}\| \|\underline{H}\|$ und $\|\underline{H}\| = 1$:

$$\text{cond}(\underline{A} \underline{H}) \leq \text{cond}(\underline{A}) \quad (3.1.19)$$

Daraus ergeben sich zwei Sonderfälle:

Satz 3.2: Ist $\underline{A}$ eine beliebige $(m \times n)$ -Matrix ($m \geq n$) vom Rang n , dann gilt für jede $[m \times (n-k)]$ -Matrix $\underline{A}'$, die durch Streichen von k Spalten in $\underline{A}$ entsteht:

$$\text{cond}(\underline{A}') \leq \text{cond}(\underline{A}) \quad (3.1.20)$$

Analog gilt für jede $[(m-k) \times n]$ -Matrix $\underline{A}''$, die durch Streichen von k Zeilen in der $(m \times n)$ -Matrix $\underline{A}$ entsteht ($m \leq n$, $\text{Rang}(\underline{A}) = m$):

$$\text{cond}(\underline{A}'') \leq \text{cond}(\underline{A}) \quad (3.1.21)$$

Satz 3.3: $\underline{A}$ sei eine $(m \times n)$ -Matrix ($m > n$) vom Rang $r = n$. Bezeichnet $\underline{B}$ eine $(m \times k)$ -Matrix ($k \leq m-n$), sodaß die erweiterte

$[m \times (n+k)]$ -Matrix $\begin{bmatrix} \underline{A}, \underline{B} \end{bmatrix}$ vom Rang $(n+k)$ ist, dann gilt:

$$\text{cond}(\underline{A}) \leq \text{cond}(\begin{bmatrix} \underline{A}, \underline{B} \end{bmatrix}) \quad (3.1.22)$$

Gegenüber Änderungen in $(\underline{A}, \underline{b})$ gilt mit

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{A} + \Delta \underline{A} \quad \tilde{\underline{b}} = \underline{b} + \Delta \underline{b} \quad (3.1.23)$$

$$\delta = \frac{\|\Delta \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|} \quad \epsilon = \frac{\|\Delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \quad (3.1.24)$$

und der Abkürzung:

$$K_{\delta} = \|\underline{S}^{-1}\| \|\Delta \underline{A}\| = \underline{s}_r^{-1} \|\Delta \underline{A}\| \quad (3.1.25)$$

Satz 3.4: Wenn $K_{\delta} < 1$, dann ist

$$\text{Rang}(\underline{A} + \Delta \underline{A}) \geq \text{Rang}(\underline{A}) \quad (3.1.26)$$

Satz 3.5: Es sei $\tilde{\underline{A}} = \underline{A} + \Delta \underline{A}$. Wenn $K_{\delta} < 1$ und weiterhin

$\text{Rang}(\tilde{\underline{A}}) > \text{Rang}(\underline{A})$, dann gilt:

$$K_S(\tilde{\underline{A}}) \geq (1/\delta) - 1 \quad (3.1.27)$$

Ist nach Satz 3.1 $\underline{H}$ eine $(n \times n)$ -Matrix, dann gilt in Gl. (3.1.19) das Gleichheitszeichen, womit eine Orthogonaltransformation beschrieben wird. Ist $\underline{H}$ eine $[n \times (n-k)]$ -Matrix, dann folgt Satz 3.2 und Gl. (3.1.20) unmittelbar aus Gl. (3.1.19). Der Rang von $\underline{A} \underline{H} = \underline{A}'$ bzw. von $\underline{H} \underline{A} = \underline{A}''$ ist dabei gegenüber $\text{Rang}(\underline{A})$ verkleinert.

Satz 3.3 kehrt diese Verhältnisse um. Werden demnach entsprechend Gl. (3.1.22) mehr unabhängige Parameter in ein überbestimmtes LS-Problem eingeführt, als dem vollen Rang entspricht, dann hat die resultierende Koeffizientenmatrix $\begin{bmatrix} \underline{A}, \underline{B} \end{bmatrix}$ im allgemeinen eine vergrößerte Konditionszahl. Damit liefert Satz 3.3 eine Begründung dafür,

daß die Gruppe von Parameterschätzverfahren, die außer den Prozeßparametern weitere Störparameter zu schätzen versucht, prinzipiell schlechter konditioniert ist als die Gruppe von Schätzverfahren, die mit der Minimalzahl von Prozeßkennwerten auskommt (LS-, IVA- und KOR-Verfahren).

Satz 3.4 sagt aus, daß durch kleine Änderungen in den Elementen von $\underline{A}$ der Rang von $\underline{A}$ erhöht werden kann, während nach Satz 3.5 die "benachbarte" Matrix $\tilde{\underline{A}}$ dann eine sehr große Konditionszahl hat, wenn $\tilde{\underline{A}}$ einer Matrix von kleinerem Rang sehr nahe kommt. Dies liefert gemeinsam mit Satz 3.3 eine Motivation dafür, in ungewissen Fällen den kleinstmöglichen Rang von $\tilde{\underline{A}}$ zu wählen, um die Eindeutigkeit des Schätzproblems sicherzustellen.

Eine Konditionsverbesserung der Matrix $\underline{A}$ läßt sich demnach auf drei Arten gewinnen:

- a) Durch geeignete Transformation von $\underline{A}$ nach Satz 3.1, Gl.(3.1.19),
- b) Durch Rangverkleinerung nach Satz 3.3, Gl. (3.1.22),
- c) Durch Erhöhen von $\|\Delta \underline{A}\|$ und damit von δ gemäß Gl. (3.1.27).

Von der Aussage in Punkt b) wird bei der Vorabbestimmung der Modellordnung Gebrauch gemacht (Kapitel 4.1), während sich die bisher bekannten Verfahren zur Konditionsverbesserung auf Punkt c) beziehen. Es sind dies die Verfahren der stochastischen Erweiterung und der Modifikation der Schätzgleichung, die im Anhang A3 näher beschrieben werden. Beide Verfahren lösen statt Gl. (3.1.1) ein benachbartes, besser konditioniertes System und korrigieren anschließend diese benachbarte Lösung in geeigneter Weise.

Das vorliegende Konzept bezieht sich dagegen auf Satz 3.1, d.h. die Konditionsverbesserung wird durch Transformation von $\underline{A}$ gewonnen.

3.1.1 Transformation der Schätzgleichung

Ausgehend von der allgemeinen Form

$$\underline{A} [mxn] \underline{x} [nx1] = \underline{b} [mx1] \quad (3.1.1)$$

wollen wir uns auf den genau bestimmten Fall beschränken, um den Bezug zur expliziten IVA-Schätzgleichung herzustellen. Es war bei N Messungen:

$$\underline{W}^T \underline{M} [qxq] \hat{\underline{p}} [qx1] = \underline{W}^T \underline{Y} [qx1] \quad (3.1.28)$$

$$\text{mit} \quad \text{Rang}(\underline{W}^T \underline{M}) = q = 2n \quad (3.1.29)$$

Gemäß Satz 3.1 nehmen wir zunächst an, wir hätten bereits eine (Nxq) -Matrix $\underline{H}$ gefunden, die die Bedingung

$$\underline{H}^T \underline{H} = \underline{I} [q] \quad (3.1.30)$$

erfüllt. Dann wird aus Gl. (3.1.28):

$$\underline{H} \underline{W}^T \underline{M} \hat{\underline{p}} = \underline{H} \underline{W}^T \underline{Y} \quad (3.1.31)$$

Bei folgenden Abkürzungen für die "H-transformierten" Größen:

$$\underline{H} [Nxq] \underline{W}^T \underline{M} [qxq] = \underline{W}^T \underline{M}' [Nxq] \quad (3.1.32)$$

$$\underline{H} [Nxq] \underline{W}^T \underline{Y} [qx1] = \underline{W}^T \underline{Y}' [Nx1] \quad (3.1.33)$$

ist dann die so bezeichnete "H-transformierte" Schätzgleichung gegeben durch:

$$\underline{W}^T \underline{M}' [Nxq] \hat{\underline{p}} [qx1] = \underline{W}^T \underline{Y}' [Nx1] \quad (3.1.34)$$

Ein Vergleich mit der grundlegenden LS-Schätzgleichung (2.4.1)

$$\underline{M} [Nxq] \hat{\underline{p}} [qx1] = \underline{Y} [Nx1] \quad (3.1.35)$$

zeigt, daß Gl. (3.1.34) nunmehr in einer Form vorliegt, die eine Anwendung der orthogonalen Givens- oder Householder-Transformation ermöglicht. Damit kann auch für die Hilfsvariablenmethode ein pseudorekursives numerisches Verfahren angegeben werden, das wir wegen des notwendigen Zwischenschrittes der H-Transformation als indirekt-pseudorekursives Verfahren, abgekürzt IPR, bezeichnen wollen. Ausgehend von der expliziten Form wird die Orthogonaltransformation nach Gl. (2.2.91) und (2.2.93) wie folgt beschrieben:

$$\underline{T} \underline{W^T M}^T \hat{p} = \underline{T} \underline{W^T y}^T, \quad (3.1.36)$$

mit den Abkürzungen

$$\underline{T} [N \times N] \underline{W^T M}^T [N \times q] = \begin{bmatrix} \underline{W^T M}^* \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.1.37)$$

$$\underline{T} [N \times N] \underline{W^T y}^T [N \times 1] = \begin{bmatrix} \underline{W^T y}_1^* \\ \underline{W^T y}_2^* \end{bmatrix} \quad (3.1.38)$$

Die $(q \times q)$ -Matrix $\underline{W^T M}^*$ ist eine obere Dreiecksmatrix und $\underline{W^T y}_1^*$ ein entsprechend partitionierter q -Vektor. Damit wird aus Gl. (3.1.36) die Schätzgleichung

$$\boxed{\underline{W^T M}^* \hat{p} = \underline{W^T y}_1^*}, \quad (3.1.39)$$

die sich entsprechend Gl. (2.2.102) eindeutig und sehr einfach in sukzessiver Weise nach $\hat{p}$ auflösen läßt.

Gehen wir zur abgekürzten Schreibweise über, dann ist mit Gl. (3.22):

$$\underline{z}_H = \begin{bmatrix} \underline{W^T M} & ; & -\underline{W^T y} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

der Transformationsalgorithmus des IPR-Verfahrens wie folgt beschreibbar:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{Z}}_H = \underline{\underline{Z}}_H' = \left[\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}' \quad \mid \quad -\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{Y}}' \right] \quad (3.1.40)$$

$$\underline{\underline{T}} \underline{\underline{Z}}_H' \hat{\underline{\underline{P}}}_1 = \underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{Z}}_H' \\ \hline \underline{\underline{O}} \end{bmatrix} \hat{\underline{\underline{P}}}_1 = \underline{\underline{O}} \quad (3.1.41)$$

$$\text{oder} \quad \underline{\underline{Z}}_H' \hat{\underline{\underline{P}}}_1 = \underline{\underline{O}} \quad (3.1.42)$$

mit der orthogonalen, oberen Dreiecksmatrix $\underline{\underline{Z}}_H^*$:

$$\underline{\underline{Z}}_H^* = \left[\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}^* \quad \mid \quad -\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{Y}}^* \right] \quad (3.1.43)$$

Gl. (3.1.39) stellt unmittelbar auch die indirekt-pseudorekursive Schätzgleichung dar, wenn die Ausdrücke $\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}^*$ und $\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{Y}}^*$ in $\underline{\underline{Z}}_H^*$ rekursiv aufgebaut werden. Dann ist nach Gl. (2.2.104) und (2.2.105):

$$\underline{\underline{T}}(k+1) \begin{bmatrix} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}^*(k) \\ \hline \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{m}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}^*(k+1) \\ \hline \underline{\underline{O}}^T \end{bmatrix} \quad (3.1.44)$$

$$\underline{\underline{T}}(k+1) \begin{bmatrix} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{Y}}^*(k) \\ \hline \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{y}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{Y}}_1^* \\ \hline \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{y}}_2^* \end{bmatrix} \quad (3.1.45)$$

$$\text{oder} \quad \underline{\underline{T}}(k+1) \begin{bmatrix} \underline{\underline{Z}}_H^*(k) \\ \hline \underline{\underline{Z}}_H^T(k+1) \end{bmatrix} = \underline{\underline{Z}}_H^*(k+1) \quad (3.1.46)$$

$$\text{mit} \quad \underline{\underline{Z}}_H^T(k+1) = \left[\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{m}}(k+1) \quad \mid \quad -\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{y}}(k+1) \right] \quad (3.1.47)$$

Die jeweils neueste Information zum Zeitpunkt $(k+1)T_0$ wird demnach durch den Zeilenvektor $\underline{\underline{Z}}_H^T(k+1)$ verkörpert, der noch näher definiert werden muß.

Zur Bestimmung der Transformationsmatrix $\underline{\underline{H}}$ wählen wir zweckmäßiger-

weise die Analogie zum expliziten LS-Verfahren. Formal läßt sich der Aufbau der Meßwertmatrix $\underline{M}$ und der rechten Seite $\underline{y}$ in der Matrix $\underline{Z}$ für die $(k+1)$ -te Meßreihe wie folgt angeben:

$$\underline{Z}(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} \underline{M}(k+1) & -\underline{y}(k+1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{Z}(k) \\ \hline \underline{Z}^T(k+1) \end{array} \right] \quad (3.1.48)$$

Die neu hinzukommende Information $\left[\underline{m}^T(k+1) \quad -y(k+1) \right]$ ist im Zeilenvektor $\underline{Z}^T(k+1)$ enthalten und bildet die $(k+1)$ -te Zeile von $\underline{Z}(k+1)$. Beim IVA-Verfahren besteht die jeweils neue Information dagegen aus $\{ \underline{m}(k+1), \underline{w}(k+1), y(k+1) \}$, die zusammengefaßt in der $[qx(q+1)]$ -Matrix $\underline{Z}_H(k+1)$ enthalten ist. Entsprechend Gl. (3.1.48) erweitern wir im $(k+1)$ -ten Rekursionsschritt die Matrix $\underline{Z}_H'(k)$ zunächst um die vollständige Information $\underline{Z}_H(k+1)$, sodaß sich folgende erweiterte Matrix ergibt:

$$\left[\begin{array}{c} \underline{Z}_H'(k) \\ \hline \underline{Z}_H(k+1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{w}^T \underline{M}'(k)_{[k \times q]} & -\underline{w}^T \underline{y}'(k)_{[k \times 1]} \\ \hline \underline{w}^T \underline{M}(k+1)_{[q \times q]} & -\underline{w}^T \underline{y}(k+1)_{[q \times 1]} \end{array} \right] \quad (3.1.49)$$

Im nächsten Schritt verzichten wir nun bewußt auf die Verarbeitung der gesamten Information aus $\underline{Z}_H(k+1)$ und beschränken uns stattdessen bei jeder Rekursion auf den Informationsgehalt lediglich der i -ten Zeile aus der Matrix $\underline{Z}_H(k+1)$, wobei i alternierend die Werte $i = 1, 2, \dots, q$ annimmt. Die gesuchte Matrix $\underline{Z}_H'(k+1)$ ergibt sich demnach durch Streichen von $(q-1)$ Zeilen aus der erweiterten Form der Gl. (3.1.49), d.h. wir führen folgende Transformation mit der $[(k+1) \times (k+q)]$ -Matrix $\underline{H}(k+1)$ durch:

$$\underline{H}(k+1) \left[\begin{array}{c} \underline{Z}_H'(k) \\ \hline \underline{Z}_H(k+1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{Z}_H'(k) \\ \hline \underline{z}_{Hi}^T(k+1) \end{array} \right] = \underline{Z}_H'(k+1) \quad (3.1.50)$$

$\underline{H}(k+1)$ hat dann folgende Form:

$$\underline{H}(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} \underline{I}[k] & \underline{O}[kxq] \\ \hline \underline{O}^T[1xk] & \underline{e}_i^T[1xq] \end{array} \right] [(k+1)x(k+q)] \quad (3.1.51)$$

Dabei ist $\underline{e}_i^T$ die i-te Zeile der Einheitsmatrix, mit

$$i = i(k+1) = 1 + k \bmod(q), \quad (3.1.52)$$

der Vektor $\underline{z}_{Hi}^T(k+1)$ ist die i-te Zeile aus der Matrix $\underline{Z}_H(k+1)$.

Man verifiziert leicht, daß die Transformationsmatrix $\underline{H}(k+1)$ nach Gl. (3.1.51) die Bedingung

$$\underline{H}^T(k+1) \underline{H}(k+1) = \underline{I}[k+q] \quad (3.1.53)$$

erfüllt, womit nach Satz 3.1 die Voraussetzung für eine gegenüber $\underline{W}_H^T(k+1)$ verbesserte Kondition von $\underline{W}_H^T(k+1)$ gegeben ist.

Bei der rekursiven Datenverarbeitung wird die $[(k+1)x(q+1)]$ -Matrix $\underline{Z}_H'(k+1)$ natürlich nicht explizit gebildet, sondern lediglich die $[qx(q+1)]$ -Matrix $\underline{Z}_H(k+1)$. Zur Reduktion der Daten nach der Givens- oder Householder-Methode wird dann lediglich die i-te Zeile aus $\underline{Z}_H(k+1)$ benötigt. Damit zeichnet sich auch das IPR-Verfahren durch sehr geringen Speicherplatzbedarf aus.

Wir wollen nun etwas näher auf die Form der H-transformierten Größen

$$\underline{W}_H^T M' = \underline{H} \underline{W}_H^T M \quad (3.1.32)$$

$$\underline{W}_H^T Y' = \underline{H} \underline{W}_H^T Y \quad (3.1.33)$$

eingehen. Da nach Gl. (3.12) und (3.13) die Elemente der zusammengefaßten Ausdrücke $\underline{W}_H^T M$ und $\underline{W}_H^T Y$ sich aus inneren Vektorprodukten ergeben, wählen wir folgende Abkürzung für die Summierung von N Produkten der Form $u(i+t) \cdot y(j+t)$, beginnend mit dem Index $t = k$:

$$\sum_{t=k}^{N+k-1} u(i+t) y(j+t) = [u(i) y(j)]_k^N \quad (3.1.54)$$

Damit wird aus Gl. (3.12):

$$\underline{w^T M} = \begin{bmatrix} [y_H(o)y(o)]_n^N & \dots & [y_H(o)y(1-n)]_n^N & -[y_H(o)u(o)]_n^N & \dots & -[y_H(o)u(1-n)]_n^N \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [y_H(1-n)y(o)]_n^N & \dots & [y_H(o)y(o)]_1^N & -[y_H(1-n)u(o)]_n^N & \dots & -[y_H(o)u(o)]_1^N \\ \hline -[u(o)y(o)]_n^N & \dots & -[u(o)y(1-n)]_n^N & [u(o)u(o)]_n^N & \dots & [u(o)u(1-n)]_n^N \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -[u(1-n)y(o)]_n^N & \dots & -[u(o)y(o)]_1^N & [u(1-n)u(o)]_n^N & \dots & [u(o)u(o)]_1^N \end{bmatrix} \quad (3.1.55)$$

Ebenso wird aus Gl. (3.13):

$$\underline{w^T y} = \begin{bmatrix} -[y_H(o)y(1)]_n^N \\ \vdots \\ -[y_H(1-n)y(1)]_n^N \\ \hline [u(o)y(1)]_n^N \\ \vdots \\ [u(1-n)y(1)]_n^N \end{bmatrix} \quad (3.1.56)$$

Aus Gl. (3.1.55) wird deutlich, daß die einzelnen Elemente von $\underline{w^T M}$ aus N Summierungen mit zeilenweise unterschiedlichem Summierungsbeginn gebildet werden. Ein Vergleich dieser Summenausdrücke mit Gl. (2.2.36) zeigt die enge Verwandtschaft zu den dort definierten Korrelationsfunktionen. Es ist damit:

$$R_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)y(t-\tau), \quad \tau = 0, \dots, n-1 \quad (3.1.57)$$

Definieren wir die Summenausdrücke für N Meßwerte mit variablem Summierungsbeginn wie folgt:

$$[s_{yu}(\tau)]_k^N = [u(0)y(-\tau)]_k^N = \sum_{t=k}^{N+k-1} u(t)y(t-\tau), \quad \tau = 0, \dots, n-1 \quad (3.1.58)$$

dann folgt mit Gl. (3.1.57):

$$R_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} [s_{yu}(\tau)]_1^N \quad (3.1.59)$$

Die Summenausdrücke $s_{yu}(\tau)$ lassen sich daher als Pseudo-Korrelationsfunktionen ansehen. Mit der Abkürzung von Gl. (3.1.58) können die Gl. (3.1.55) und (3.1.56) umgeformt werden:

$$\underline{W}^T \underline{M} = \left[\begin{array}{cc|cc} [s_{yy_H}(0)]_n^N & \text{-----} & [s_{yy_H}(n-1)]_n^N & | & -[s_{uy_H}(0)]_n^N & \text{-----} & -[s_{uy_H}(n-1)]_n^N \\ | & & | & & | & & | \\ [s_{y_H y}(n-1)]_n^N & \text{-----} & [s_{yy_H}(0)]_1^N & | & -[s_{y_H u}(n-1)]_n^N & \text{-----} & -[s_{uy_H}(0)]_1^N \\ \hline -[s_{yu}(0)]_n^N & \text{-----} & -[s_{yu}(n-1)]_n^N & | & [s_{uu}(0)]_n^N & \text{-----} & [s_{uu}(n-1)]_n^N \\ | & & | & & | & & | \\ -[s_{uy}(n-1)]_n^N & \text{-----} & -[s_{yu}(0)]_1^N & | & [s_{uu}(n-1)]_n^N & \text{-----} & [s_{uu}(0)]_1^N \end{array} \right] \quad (3.1.60)$$

$$\underline{W}^T \underline{y} = \left[\begin{array}{c} -[s_{y_H y}(1)]_{n+1}^N \\ \vdots \\ -[s_{y_H y}(n)]_{n+1}^N \\ \hline [s_{uy}(1)]_{n+1}^N \\ \vdots \\ [s_{uy}(n)]_{n+1}^N \end{array} \right] [q \times 1] \quad (3.1.61)$$

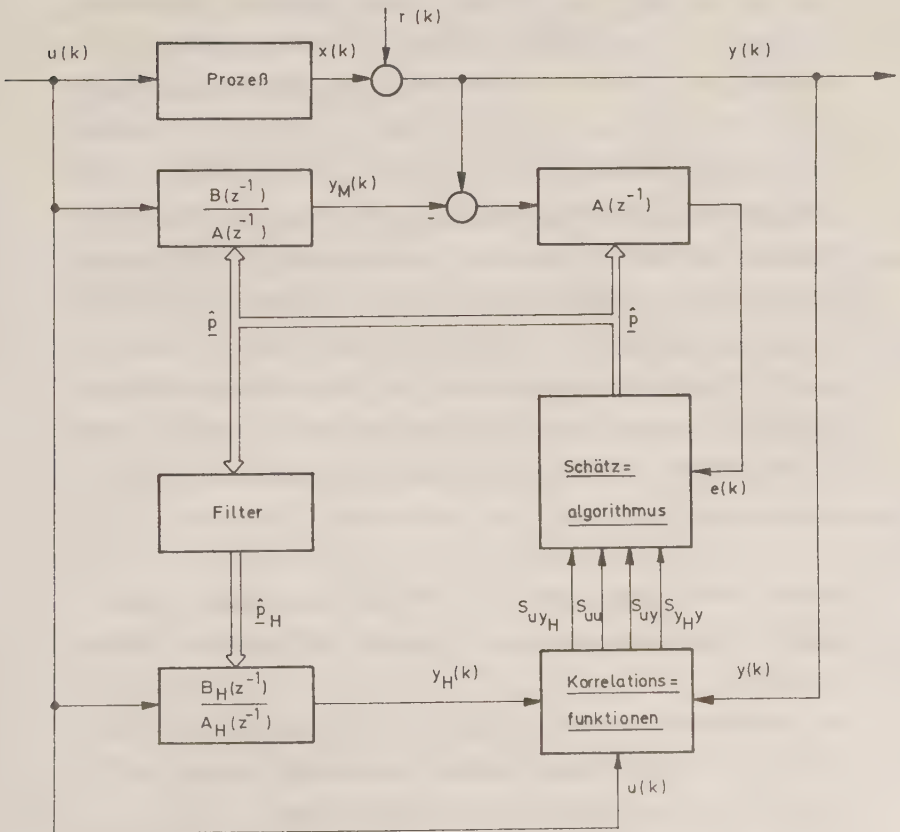
Führen wir die H-Transformation gemäß Gl. (3.1.50) durch, dann ergeben sich folgende Ausdrücke, wenn wir vereinfachend annehmen, daß $N = k \cdot q$ sei, mit $q = 2n$ und k ganzzahlig:

$$\underline{W}^T \underline{M}' = \begin{bmatrix} [S_{yy_H}(0)]_n^1 & \text{---} & [S_{yy_H}(n-1)]_n^1 & | & -[S_{uy_H}(0)]_n^1 & \text{---} & -[S_{uy_H}(n-1)]_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [S_{y_H y}(n-1)]_n^n & \text{---} & [S_{yy_H}(0)]_1^n & | & -[S_{y_H u}(n-1)]_n^n & \text{---} & -[S_{uy_H}(0)]_1^n \\ -[S_{uy}(0)]_n^{n+1} & \text{---} & -[S_{yu}(n-1)]_n^{n+1} & | & +[S_{uu}(0)]_n^{n+1} & \text{---} & [S_{uu}(n-1)]_n^{n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -[S_{uy}(n-1)]_n^q & \text{---} & -[S_{yu}(0)]_1^q & | & [S_{uu}(n-1)]_n^q & \text{---} & -[S_{uu}(0)]_1^q \\ [S_{yy_H}(0)]_n^{q+1} & \text{---} & [S_{yy_H}(n-1)]_n^{q+1} & | & -[S_{uy_H}(0)]_n^{q+1} & \text{---} & -[S_{uy_H}(n-1)]_n^{q+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -[S_{uy}(n-1)]_n^N & \text{---} & -[S_{yu}(0)]_1^N & | & [S_{uu}(n-1)]_n^N & \text{---} & [S_{uu}(0)]_1^N \end{bmatrix}$$

(3.1.62)

$$\underline{W}^T \underline{y}' = \begin{bmatrix} -[S_{y_H y}(1)]_{n+1}^1 \\ \vdots \\ -[S_{y_H y}(n)]_{n+1}^n \\ [S_{uy}(1)]_{n+1}^{n+1} \\ \vdots \\ [S_{uy}(n)]_{n+1}^q \\ -[S_{y_H y}(1)]_{n+1}^{q+1} \\ \vdots \\ [S_{uy}(n)]_{n+1}^N \end{bmatrix} = \underline{H} \underline{W}^T \underline{y} \quad [N \times 1] \quad (3.1.63)$$

Ein Vergleich der transformierten Matrizen $\underline{w}^T \underline{M}'$, $\underline{w}^T \underline{y}'$ mit den entsprechenden Meßwertausdrücken $\underline{M}$, $\underline{y}$ des ursprünglichen LS-Problems nach Gl. (2.4.1) zeigt, daß bei diesem indirekt-pseudorekursiven IVA-Verfahren die Meßwerte der LS-Schätzung formal durch die entsprechenden Pseudo-Korrelationsfunktionen S_{yy_H} , S_{uy} , S_{uy_H} und S_{uu} ersetzt werden, womit sich eine Modellstruktur nach Bild 3.1 ergibt.



Es ist dann naheliegend, zur Kennwertermittlung das rekursiv gestaltete orthogonale Transformationsverfahren nach Givens oder Householder zu verwenden, womit sich über die H-Transformation das IVA-IPR-Verfahren ergibt.

Gegenüber dem universell expliziten IVA-Verfahren gewinnen wir mit dem IPR-Verfahren zwei bedeutsame Verbesserungen, und zwar hinsichtlich der Stabilität und der Kondition des numerischen Verfahrens. Die gute Stabilität des LS-UVEX-Verfahrens beruht auf dem Merkmal, daß jeweils ein Gleichungssystem mit positiv definiter Koeffizientenmatrix $\underline{M}^T \underline{M} = \underline{A}$ zu lösen ist, während die charakteristische Matrix $\underline{W}^T \underline{M}$ des IVA-UVEX- oder IVA-REK-Verfahrens im allgemeinen indefinit ist. Beim IPR-Verfahren liegt aber ebenso wie beim direkten pseudo-rekursiven Verfahren die orthogonal transformierte Koeffizientenmatrix in Dreiecksform vor, wobei die Orthogonalisierungsstrategie die vorgegebene Konditionszahl nicht mehr verändert. Damit ist das eigentliche Lösungsverfahren hinsichtlich der Stabilität dem für positiv definite Matrizen gleichwertig, da in letzterem Falle die Eigenschaft ausgenutzt wird, daß sich jede positiv definite Matrix $\underline{A}$ als Produkt zweier reeller Dreiecksmatrizen $\underline{L}$ darstellen läßt:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{L}^T \quad (3.1.64)$$

Mit dem IPR-Verfahren gewinnen wir daher die gewünschten Eigenschaften zurück, die Lösungsverfahren für positiv definite Matrizen auszeichnen.

Die verbesserte Kondition des IPR-Verfahrens gegenüber dem UVEX-Verfahren ist auf die Anwendung der H-Transformation nach Satz 3.1 und Satz 3.2 zurückzuführen. Mit der Randbedingung $\underline{H}^T \underline{H} = \underline{I}$ gilt dann folgende Ungleichung:

$$\text{cond}(\underline{H} \underline{W}^T \underline{M}) = \text{cond}(\underline{W}^T \underline{M}') < \text{cond}(\underline{W}^T \underline{M}) \quad (3.1.65)$$

Da wir im Sonderfall $\underline{W} = \underline{M}$ das IPR-Verfahren auch zur Least-squares-Schätzung verwenden können, lassen sich für diesen Fall beide pseudo-rekursive Verfahren mit dem universell expliziten Verfahren (UVEX) vergleichen. Ordnen wir den einzelnen Verfahren folgende bestimmende Koeffizientenmatrizen zu:

$$\text{DPR} : \underline{M}$$

$$\text{UVEX} : \underline{M}^T \underline{M}$$

$$\text{IPR} : \underline{M}^T \underline{M}' = \underline{H} \underline{M}^T \underline{M}, \quad (3.1.66)$$

dann folgt mit Gl. (2.4.46):

$$\text{cond}(\underline{M}) < \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}') < \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) = \text{cond}(\underline{M})^2. \quad (3.1.67)$$

Die Kondition des indirekten pseudorekursiven Verfahrens liegt damit i.a. zwischen der Kondition von DPR- und UVEX-Verfahren, ein direkter Zusammenhang zwischen $\text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}')$ und den Randwerten $\text{cond}(\underline{M})$ bzw. $[\text{cond}(\underline{M})]^2$ ist allerdings nicht angebar. Kann man in 1.Näherung annehmen, daß diese Randwerte $\text{cond}(\underline{M})$, $[\text{cond}(\underline{M})]^2$ vom Meßintervall unabhängig sind, so gilt dies für $\text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}')$ nicht mehr. Anhand einer Vielzahl simulierter Prozesse wurde eine deutliche Abhängigkeit der Werte $\text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}')$ von der Zahl der Meßwerte N festgestellt, wobei sich dieser funktionale Zusammenhang durch ein ausgeprägtes Minimum auszeichnet, wie es rein qualitativ im Bild 3.2 angedeutet ist.

Um das Prinzip der H-Transformation noch etwas näher zu erläutern, schreiben wir Gl. (3.1.31):

$$\underline{H}_{[Nxq]} \underline{W}^T \underline{M}_{[qxq]} \hat{\underline{P}}_{[qx1]} = \underline{H}_{[Nxq]} \underline{W}^T \underline{Y}_{[qx1]} \quad (3.1.31)$$

in leicht geänderter Form an:

$$[\underline{H} \underline{W}^T]_{[NxN]} \underline{M}_{[Nxq]} \hat{\underline{P}}_{[qx1]} = [\underline{H} \underline{W}^T]_{[NxN]} \underline{Y}_{[Nx1]}. \quad (3.1.68)$$

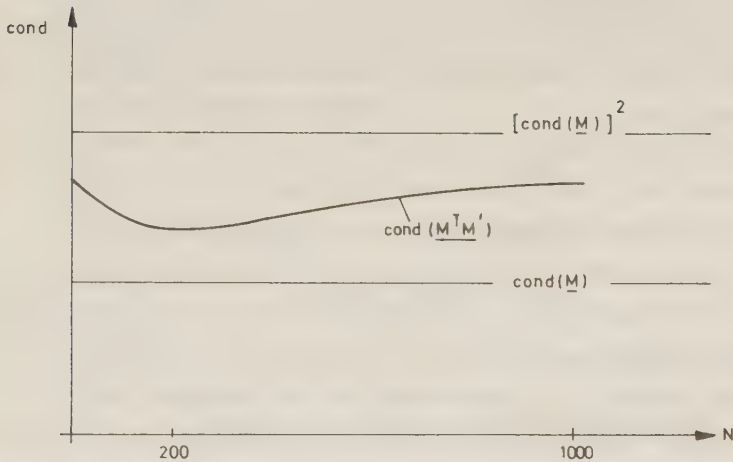


Bild 3.2: Qualitativer Konditionsvergleich der numerischen Verfahren

Die Auflösung der zusammengefaßten Ausdrücke $\underline{w}^T \underline{M}$ und $\underline{w}^T \underline{y}$ nach den Teilmatrizen $\underline{w}^T$, $\underline{M}$ und $\underline{y}$ zeigt, daß rein formal nur die $(N \times q)$ -Hilfswertmatrix $\underline{w}^T$ der H-Transformation unterzogen wird, während die Meßwertmatrix $\underline{M}$ und die rechte Seite $\underline{y}$ unverändert bleiben.

Nach Gl. (3.9) gilt für die Hilfswertmatrix $\underline{w}$:

$$\begin{aligned} \underline{w}^T &= [\underline{w}(n+1) \mid \underline{w}(n+2) \mid \dots \mid \underline{w}(n+N)] \\ &= [\underline{w}_1 \mid \underline{w}_2 \mid \dots \mid \underline{w}_N] \end{aligned} \quad (3.1.69)$$

mit der Abkürzung:

$$\begin{aligned} \underline{w}_i &= \underline{w}(n+i) = [-y_H(n+i-1) \dots -y_H(i) \mid u(n+i-1) \dots u(i)]^T \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.1.70)$$

Die H-Transformation läßt sich nun aus 2 Teilschritten bestehend beschreiben. Unter der Annahme, daß

$$N = j \cdot q, \quad j \text{ ganzzahlig} \quad (3.1.71)$$

sei, wird im ersten Schritt die $(q \times N)$ -Matrix $\underline{w}^T$ in die $(N \times N)$ -Matrix $\underline{w}_1^T$ überführt:

$$\underline{w}_1^T = \underline{H}_1 \underset{[N \times q]}{\underline{w}^T} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \vdots \\ \underline{I} \end{bmatrix} \underset{[q \times N]}{\begin{bmatrix} \underline{w}_1 & \underline{w}_2 & \dots & \underline{w}_N \end{bmatrix}} \quad (3.1.72)$$

$$\text{mit } \underline{H}_1 = \begin{bmatrix} \underline{I} & \vdots & \underline{I} & \vdots & \dots & \vdots & \underline{I} \end{bmatrix}^T \underset{[N \times q]}{\quad} \quad (3.1.73)$$

oder auch:

$$\begin{aligned} \underline{w}_1^T &= \underline{H}_1 \underline{w}^T = \begin{bmatrix} \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_N \\ \vdots \\ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_N \end{bmatrix} \underset{[N \times N]}{\quad} \\ &= [\underline{w}_{11}, \underline{w}_{12}, \dots, \underline{w}_{1N}] \cdot \end{aligned} \quad (3.1.74)$$

Diese erweiterte Form $\underline{w}_1^T$ enthält nach Gl. (3.1.74) j-mal dieselbe Information $\underline{w}^T$, wobei j nach Gl. (3.1.71) definiert ist. $\underline{w}_1^T$ ist zwar eine singuläre Matrix, hat aber denselben Rang und dieselbe Konditionszahl wie die nichtsinguläre Matrix $\underline{w}^T$. Es ist nämlich mit

$$\underline{H}_1^T \underline{H}_1 = k \underline{I} \quad (3.1.75)$$

$$\text{auch} \quad \underline{w}_1 \underline{w}_1^T = k \underline{w} \underline{w}^T \quad (3.1.76)$$

Da die $(N \times N)$ -Matrix $\underline{w} \underline{w}^T$ und die $(q \times q)$ -Matrix $\underline{w}^T \underline{w}$ die gleichen von Null verschiedenen singulären Werte s_i und Eigenwerte λ_i haben, gilt für die Eigenwerte von $\underline{w}_1 \underline{w}_1^T$:

$$\lambda_i(\underline{w}_1 \underline{w}_1^T) = k \lambda_i(\underline{w} \underline{w}^T) \quad (3.1.77)$$

Das für die Kondition von $\underline{w}$ maßgebende Verhältnis der singulären Werte $s_1(\underline{w})/s_q(\underline{w})$ wird durch die $\underline{H}_1$ -Transformation von $\underline{w}^T$ demnach nicht geändert. Es gilt daher:

$$\text{cond}(\underline{w}_1 \underline{w}_1^T) = \text{cond}(\underline{w} \underline{w}^T) \quad (3.1.78)$$

$$\text{und} \quad \text{cond}(\underline{w}_1^T) = \text{cond}(\underline{w}^T) \quad (3.1.79)$$

Formal läßt sich die erweiterte $(N \times N)$ -Matrix $\underline{w}_1^T$ als Summe einer unteren Dreiecksmatrix $\underline{L}$, einer Diagonalmatrix $\underline{D}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $\underline{U}$ ansehen, wobei die Diagonalmatrix vom Rang N ist, während die Dreiecksmatrizen den Rang $(N-1)$ annehmen:

$$\underline{w}_1^T = [\underline{L} + \underline{D} + \underline{U}] \quad (3.1.80)$$

$$\text{mit} \quad \text{Rang}(\underline{D}) = N, \quad \text{Rang}(\underline{L}) = \text{Rang}(\underline{U}) = N-1 \quad (3.1.81)$$

Im zweiten Schritt wird nun $\underline{w}_1^T$ derart transformiert, daß gilt:

$$\underline{w}_2^T = \underline{H}_2 \underline{w}_1^T = [\underline{L} + \underline{D}] \quad (3.1.82)$$

Das Abschneiden des oberen dreieckförmigen Anteils $\underline{U}$ läßt sich über geeignete Transformationsmatrizen $\underline{H}_{2i}$ erreichen, sodaß mit Gl. (3.1.74) gilt:

$$\underline{w}_2^T = [\underline{H}_{21} \underline{w}_{11} : \underline{H}_{22} \underline{w}_{12} : \dots : \underline{H}_{2N} \underline{w}_{1N}] \quad (3.1.83)$$

Die einzelnen Matrizen $\underline{H}_{2i}$ nehmen dabei folgende Form an:

$$\underline{H}_{21} = \underline{I} [N]$$

$$\underline{H}_{2i} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{I} [N-i+1] \end{array} \right] [N \times N]$$

$$\underline{H}_{2N} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array} \right] [N \times N] \quad (3.1.84)$$

Mit $\underline{H}_{2i}^T = \underline{H}_{2i}$ gilt für den nichtsingulären Anteil dieser Transformationsmatrizen:

$$\underline{H}_{2i}^T \underline{H}_{2i} = \underline{I} \quad (3.1.85)$$

Zusammenfassen der $\underline{H}_{2i}$ zur Gesamtmatrix $\underline{H}_2$ entsprechend

$$\underline{W}_2^T = \underline{H}_2 \underline{W}_1^T = \underline{H}_2 \underline{H}_1 \underline{W}^T = \underline{H} \underline{W}^T \quad (3.1.86)$$

liefert dann mit Gl. (3.1.70) die endgültige nichtsinguläre Form:

$$\underline{H} \underline{W}^T = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -y_H(n) & & & & & & & \\ -y_H(n-1) & -y_H(n) & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ u(1) & u(2) & \dots & u(q) & & & & \underline{0} \\ \hline -y_H(n) & -y_H(n+1) & \dots & -y_H(n+q) & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ -y_H(n) & -y_H(n+1) & \dots & & & & -y_H(N+n-q) & \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & & & \\ u(1) & u(2) & \dots & & & & & \dots & u(N) \end{array} \right] [N \times N] \quad (3.1.87)$$

Bildet man nach Gl. (3.1.68) die Produkte

$$\underline{H} \underline{W}^T \underline{M} = \underline{W}^T \underline{M}' \quad (3.1.88)$$

und
$$\underline{H} \underline{W}^T \underline{Y} = \underline{W}^T \underline{Y}' \quad , \quad (3.1.89)$$

dann ergeben sich mit der Abkürzung von Gl. (3.1.58) die in den Gleichungen (3.1.62) und (3.1.63) definierten Ausdrücke für $\underline{W}^T \underline{M}'$ und $\underline{W}^T \underline{Y}'$.

Kennzeichnet man das Prinzip der H-Transformation gemäß der letzteren Darstellung mit dem Abschneiden des oberen Dreieckanteils $\underline{U}$ in der erweiterten, singulären Matrix $\underline{W}_1^T = \underline{H}_1 \underline{W}^T$, dann ergibt sich daraus, daß in der H-transformierten Matrix

$$\underline{H} \underline{W}^T = \underline{H}_2 \underline{W}_1^T = \underline{H}_2 \underline{H}_1 \underline{W}^T = \underline{W}_2^T \quad (3.1.86)$$

zunächst der singuläre Charakter aufgehoben und weiterhin der Einfluß der Nichtdiagonalelemente gegenüber den Elementen der Hauptdiagonalen von $\underline{W}_2^T$ reduziert worden ist. Durch diese stärkere Gewichtung der Diagonalelemente von $\underline{W}_2^T$ rücken die singulären Werte von $\underline{W}^T \underline{M}' = \underline{W}_2^T \underline{M}$ näher zusammen, als es bei der Matrix $\underline{W}^T \underline{M}$ der Fall ist. Dies führt zur Konditionsverbesserung von $\underline{W}_2^T$ gegenüber $\underline{W}^T$, und es ist dann:

$$\text{cond}(\underline{H} \underline{W}) = \text{cond}(\underline{W}_2) < \text{cond}(\underline{W}) \quad (3.1.90)$$

Neben dieser stärkeren Gewichtung der Diagonalelemente in $\underline{W}_2^T$ wird in Gl. (3.1.87) auch eine Gewichtung der zeitlich anfallenden Elemente $\{y_H(k), y(k), u(k)\}$ vorgenommen. Bei

$$N = j \cdot q, \quad j \text{ ganzzahlig}$$

und
$$\underline{H} \underline{W}^T = \underline{W}_2^T = \{w_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N\} \quad (3.1.91)$$

wird deutlich, daß das Element $-y_H(n) = w_{11}$ j-mal in $\underline{W}_2^T$ enthalten ist, während das Element $-y_H(n+1) = w_{q+1,2}$ nur noch (j-1)-mal und

das Element $u(N) = w_{N,N}$ schließlich nur noch 1-mal berücksichtigt wird. Die weiter zurückliegenden Werte erhalten damit größeres Gewicht als die neuesten Werte, oder umgekehrt: Der Einfluß der neuesten Information wird stärker gedämpft, als es durch die Regression ohnehin der Fall ist.

Zur Beschreibung dieses Sachverhaltes gehen wir von dem Merkmal aus, daß das IPR-Verfahren die H-transformierte Schätzgleichung durch Orthogonaltransformation nach Gl. (3.1.41) löst:

$$\underline{T} [\underline{H} \quad \underline{Z}_H] \hat{\underline{p}}_1 = \underline{T} \underline{Z}_H' \hat{\underline{p}}_1 = 0 \quad (3.1.41)$$

Für den oberen Dreiecksanteil von $\underline{T} \underline{Z}_H'$ ist:

$$\underline{Z}_H^* \hat{\underline{p}}_1 = 0 \quad (3.1.42)$$

mit
$$\hat{\underline{p}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\underline{p}} \\ \text{---} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.92)$$

Das rekursive Bildungsgesetz der Datenmatrix $\underline{Z}_H^*$ läßt sich wie folgt angeben:

$$\underline{Z}_H^*(k+1) = \underline{Z}_H^*(k) + \Delta \underline{Z}_H^*(k+1) \quad (3.1.93)$$

Eine stärkere Bewertung der weiter zurückliegenden Meß- und Hilfswerte nach Gl. (3.1.87) kann als Verzögerung 1. Ordnung beschrieben werden. Dann ist Gl. (3.1.93) entsprechend zu modifizieren:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1^*(k+1) &= \alpha \underline{Z}_1^*(k) + (1-\alpha) \Delta \underline{Z}_1^*(k+1) \\ \underline{Z}_H^*(k+1) &= \underline{Z}_1^*(k+1) \end{aligned} \quad (3.1.94)$$

mit $0 < \alpha < 1 \quad (3.1.95)$

Dabei bezeichnet $\underline{Z}_1^*(k)$ den fiktiven Fall der Gleichbewertung von alten

und neuen Meßwerten.

Aufgrund der durch Gl. (3.1.94) beschriebenen prinzipiellen Verzögerungswirkung des IPR-Verfahrens ist ein langsames, stärker geglättetes Einschwingverhalten der Parameter $\hat{p}(t)$ zu erwarten als es bei dem DPR- oder UVEX-Verfahren der Fall ist. Weiterhin ist der Zeitverlauf $\hat{p} = \hat{p}(t)$ durch starkes Überschwingen im Bereich weniger Meßwerte gekennzeichnet, da die Information der stabilisierend wirkenden neuen Meß- und Hilfswerte nicht vollständig ausgeschöpft wird (DT_1 -Verhalten). Beide Eigenschaften lassen sich kompensieren. Das starke Überschwingen bei wenig Meßwerten kann dadurch umgangen werden, daß man den Anlauf des IPR-Verfahrens als DPR-Verfahren durchführt. Dann wird in einem ersten engen Meßintervall von N_0 Abtastungen das indirekt pseudorekursive IVA-Verfahren durch das direkte pseudorekursive LS-Verfahren ersetzt, wobei jeweils der Meßwertvektor $\underline{z}^T(k+1) = [\underline{m}^T(k+1) \quad -y(k+1)]$ statt $\underline{z}_H^T(k+1)$ orthogonal transformiert wird. Erst danach beginnt das eigentliche IVA-IPR-Verfahren mit der Reduktion der Zeilen $\underline{z}_{H1}^T$ aus der Matrix $\underline{Z}_H = [\underline{w}^T M \quad -\underline{w}^T y]$. Der Anlauf des IVA-IPR-Verfahrens als LS-Verfahren ist ebenso wie bei dem IVA-UVEX-Verfahren sinnvoll bzw. sogar notwendig, wie im Kapitel 3.3 noch näher erläutert wird.

Die prinzipielle Verzögerungswirkung des IPR-Verfahrens läßt sich andererseits durch Einführen eines konstanten Faktors ρ in das rekursive Bildungsgesetz, Gl. (3.1.93), kompensieren:

$$\underline{Z}_H^*(k+1) = \rho \underline{Z}_H^*(k) + \Delta \underline{Z}_H^*(k+1) \quad (3.1.96)$$

mit $0 < \rho < 1$. (3.1.97)

Gl. (3.1.96) beschreibt ein exponentiell gewichtetes IPR-Verfahren, das den Zeitverlauf durch Vorhaltbildung korrigiert, dessen Kondition aber erhalten bleibt, da durch die Gewichtung zwar Determinante und singuläre

Werte $s_i(\underline{Z}_H^*)$ verändert werden, nicht aber das charakteristische Verhältniss $s_1(\underline{Z}_H^*)/s_q(\underline{Z}_H^*)$.

Eine gewisse Freiheit hat man in der Wahl des Gewichtungsfaktors ρ , der für die Konvergenz des IPR-Verfahrens maßgebend ist. Grundsätzlich ist die Gewichtung des IPR-Verfahrens nach Gl. (3.1.96) von einer gleichartigen Gewichtung zu unterscheiden, die auch für das DPR-Verfahren gemäß

$$\underline{Z}^*(k+1) = \rho \underline{Z}^*(k) + \Delta \underline{Z}^*(k+1) \quad (3.1.98)$$

mit

$$0 < \rho \leq 1$$

möglich ist und zur schnelleren Anpassung an zeitlich veränderliche Parameter dient. Im störungsfreien Fall läßt sich durch sehr kleine Werte von ρ die Anpassung praktisch beliebig schnell erreichen, da die exponentielle Bewertung einem "Vergessen" der älteren Meßwerte, d.h. einer Verkleinerung des Meßintervalls gleichkommt. Im Grenzfall sind lediglich q Meßwerte nötig, um die veränderten Kennwerte exakt zu bestimmen. Da beim DPR-Verfahren die neuen und alten Meßwerte alle gleichbewertet werden, wirkt bei gestörten Meßwerten eine Gewichtung mit $\rho < 1$ der gewünschten Rauschdämpfung entgegen, die sich gerade durch Vergrößerung des Meßintervalls ergibt. Man ist daher auf einen Kompromiß zwischen guter Anpassungsfähigkeit und guter Rauschdämpfung angewiesen und wird ρ etwa aus folgendem Zahlenbereich wählen/62/:

$$0,99 \leq \rho \leq 1 \quad . \quad (3.1.99)$$

Dieser sehr enge Bereich beruht auf der Eigenschaft, daß im Zuge der DPR-Strategie zur Parameterbestimmung mit Gl. (3.1.98) eine tatsächliche Gewichtung der alten Information mit dem Faktor ρ^2 bewirkt wird. Dies gilt ebenso für das UVEX-Verfahren und kann am einfachsten über den rekursiven Algorithmus gezeigt werden. Nach Gl. (2.2.61) ist bei Berücksichtigung

sichtigung des Faktors ρ :

$$\begin{aligned}\underline{P}(k+1)^{-1} &= \underline{M}^T(k+1) \underline{M}(k+1) \\ &= [\rho \underline{M}(k)]^T [\rho \underline{M}(k)] + \underline{m}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \\ &= \rho^2 \underline{P}(k)^{-1} + \underline{m}(k+1) \underline{m}^T(k+1) .\end{aligned}\quad (3.1.100)$$

Die Kennwerte $\hat{\underline{p}}$ ergeben sich dann entsprechend Gl. (2.2.65) /1/:

$$\hat{\underline{p}}(k+1) = \hat{\underline{p}}(k) + \gamma(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) [y(k+1) - \underline{m}^T(k+1) \hat{\underline{p}}(k)] \quad (3.1.101)$$

mit

$$\underline{P}(k+1) = c^{-1} [\underline{P}(k) - \gamma(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1) \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k)] \quad (3.1.102)$$

$$\gamma(k+1) = [c + \underline{m}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{m}(k+1)]^{-1} \quad (3.1.103)$$

und

$$c = \rho^2 . \quad (3.1.104)$$

Damit ist $\hat{\underline{p}}(k+1) \sim \underline{P}(k)$, das mit $c = \rho^2$ gewichtet wird.

Beim IPR-Verfahren erstreckt sich die Gleichbewertung von neuer und alter Information nur auf die Bildung der Matrix $\underline{Z}_H(k+1)$, die die Gesamtinformation enthält. Da bei jedem Rekursionsschritt eine Zeile aus $\underline{Z}_H(k+1)$ und nicht aus der Korrektur $\Delta \underline{Z}_H(k+1)$ reduziert wird, ergibt sich prinzipiell eine Überbewertung der älteren Meßwerte. Durch Einführen eines Faktors $\rho < 1$ im IPR-Verfahren wird das Meßintervall nicht verkleinert, sondern lediglich eine Anpassung der in den Meßwerten enthaltenen Gewichte erreicht, im günstigsten Falle demnach eine Gleichgewichtung von älterer und neuester Information. Die Verarbeitung nur einer Zeile aus der q-zeiligen Matrix $\underline{Z}_H(k+1)$ hat zur Folge, daß sich ρ aus dem Bereich

$$1/q \leq \rho < 1 \quad (3.1.105)$$

wählen läßt, ohne daß sich die Parameterempfindlichkeit wesentlich erhöhen würde. Für gutkonditionierte Systeme erhält man schon mit $\rho = 0,9$ eindeutige, und folglich konsistente Schätzungen, wie sich aufgrund zahlreicher Simulationsstudien ergab.

Für größere Modellordnungen n wird mit $q = 2n$ der Wert $\rho = 1/q$ sehr klein, und damit kann auch die Determinante von $\underline{Z}_H^*(k+1)$ sehr klein werden. Da dies insbesondere bei Prozeßrechnern kleinerer Wortlänge zu Problemen führt, andererseits aber verfahrensintern quadratisch gewichtet wird, sollte der Wert $\rho = 1/q$ vermieden werden. Wir definieren stattdessen einen minimalen Wert $\rho_{\min}$ mit

$$\rho_{\min} = 1/\sqrt{q} \quad , \quad (3.1.106)$$

der in schlecht-konditionierten Fällen zu wählen ist und erhalten dann folgenden günstigen Wertebereich für den Gewichts- oder Konvergenzfaktor ρ :

$$\begin{aligned} & -1/2 \\ & q \leq \rho \leq 0,9 \end{aligned}$$

$$(3.1.107)$$

Will man mit dem IPR-Verfahren zeitvariante Parameter erfassen, dann ist in der Matrix $\underline{Z}_H(k+1)$ ein Faktor ρ_1 einzuführen, so daß gilt:

$$\underline{Z}_H(k+1) = \rho_1 \underline{Z}_H(k) + \Delta \underline{Z}_H(k+1) \quad . \quad (3.1.108)$$

Hinsichtlich der Wahl von ρ_1 gilt Gl. (3.1.99) mit $\rho = \rho_1$, also die gleiche Aussage wie für das DPR-Verfahren.

3.2 Hilfsmodelle

Um konsistente Schätzwerte mit Hilfe der statistischen IVA-Theorie zu erhalten, wird eine Folge von Hilfsvariablen $\{y_H(k)\}$ benötigt, die

streng mit der Eingangssignalfolge $\{u(k)\}$, nicht aber mit der Störsignalfolge $\{r(k)\}$ korreliert ist. Nach Gl. (2.3.8) müssen zur Konvergenz des Verfahrens folgende Bedingungen erfüllbar sein:

$$E \left\{ \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{M} \right\} = \underline{R}, \quad \underline{R} \text{ nichtsingulär} \quad (3.2.1)$$

$$E \left\{ \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{e} \right\} = \underline{0}. \quad (3.2.2)$$

Aus numerischen Gründen ist die Bedingung (3.2.1) weiter einzuschränken, da die Konvergenz irgendeines numerischen IVA-Verfahrens in der Praxis nicht mehr gesichert ist, wenn $\underline{R}$ nahezu singulär, d.h. hinsichtlich einer bestimmten Stellenzahl schlecht konditioniert ist. Erfüllt $\underline{R}$ folgende Bedingungen:

- a) $\underline{R}$ nichtsingulär
- b) $\text{cond}(\underline{R})$ hinreichend klein,

dann wollen wir $\underline{R}$ als regulär bezeichnen. Gl. (3.2.1) ist dann zu ersetzen durch:

$$E \left\{ \frac{1}{N} \underline{W}^T \underline{M} \right\} = \underline{R}, \quad \underline{R} \text{ regulär}. \quad (3.2.3)$$

Gl. (3.2.3) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit des IVA-Schätzproblems als Voraussetzung für die Konsistenz der Schätzung nach Gl. (3.2.2).

Sieht man den Haupteffekt des IVA-IPR-Verfahrens in der Verminderung der Konditionszahl von $[\underline{W}^T \underline{M}]$, dann läßt sich dieses Verfahren auch als eine Methode zur "Regularisierung" von $\underline{R}$ interpretieren.

Da man über das unverrauschte Ausgangssignal $x(k)$ in der Hilfwertmatrix $\underline{W}$ streng konsistente Parameterschätzungen erhält, wurde als Hilfsvariable der Schätzwert $\hat{x}(k)$ eingeführt, der sich gemäß Gl. (2.3.21) über ein

einfaches, lineares und zeitvariantes Verzögerungsmodell gewinnen läßt. Zur Schätzung von $x(k)$ kann ebenso ein optimales Kalman-Filter eingesetzt werden und weiterhin ein Impulsantwortmodell. Allen diesen zeitvarianten Hilfsmodellen ist gemeinsam, daß es bisher zwar keinen generellen Konvergenzbeweis gibt, daß sie sich aber in den zahlreichen Testläufen und in der Praxis bewährt haben.

3.2.1 Verzögerungsmodell.

Für das von Wong/Polak /27/ und Young /28/ vorgeschlagene, in Gl. (2.3.21) definierte Hilfsmodell:

$$y_H(k) = - \sum_{i=1}^n a_{iH} y_H(k-i) + \sum_{i=1}^n b_{iH} u(k-i) , \quad (3.2.4)$$

$$\hat{p}_H(k) = (1-\delta) \hat{p}_H(k-1) + \delta \hat{p}(k-v) \quad (3.2.5)$$

mit

$$\hat{p}_H = \begin{bmatrix} \hat{a}_H \\ \hat{b}_H \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1H}, \dots, a_{nH} \\ b_{1H}, \dots, b_{nH} \end{bmatrix}^T \quad (3.2.6)$$

und

$$0.01 \leq \delta \leq 0.1 \quad (3.2.7)$$

sind die zeitabhängigen Parameter $\hat{p}_H = \hat{p}_H(k) = \{\hat{a}_{iH}, \hat{b}_{iH}\}$ eine optimale Wahl für die gesuchten Hilfsmodellparameter $p_H = \{a_{iH}, b_{iH}\}$. Vorausgesetzt wird, daß der Prozeß asymptotisch stabil ist, die Systembeschreibung keine gemeinsamen Pole und Nullstellen enthält, die Störung $r(k)$ sich wie weißes Rauschen verhält und das Eingangssignal $u(k)$ eine dauernde, fortlaufende Anregung (PE = persistent excitation) der Ordnung n ermöglicht. Damit $u(k)$ die Bedingung PE(n) erfüllt, müssen nach /1/ die Grenzwerte

$$\bar{u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N u(t) \quad (3.2.8)$$

$$r_{uu}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u(t) - \bar{u}][u(t+\tau) - \bar{u}] \quad (3.2.9)$$

existieren und die $(n \times n)$ -Matrix $R_u(n)$ positiv definit sein:

$$R_u(n) = \{r_{ij}\} = \{r_{uu}(i-j)\}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.2.10)$$

In den durchgeführten Testläufen wurden die gut konvergierenden Eigenschaften dieses einfachen Verzögerungsmodells verifiziert. Für Prozesse nahe der Stabilitätsgrenze mußte allerdings der in Gl. (3.2.7) definierte Bereich für den Gewichtungsfaktor δ weiter eingeengt werden. Als günstige Wahl ergab sich folgender Wertebereich:

$$0.04 \leq \delta \leq 0.06 \quad (3.2.11)$$

Da der Einfluß der Totzeit v sehr gering ist, kann $v = 1$ gewählt werden.

2.2 Diskretes Kalman-Filter

Ist die Systemdynamik genau bekannt und verhalten sich die Systemstörungen wie weißes Rauschen mit bekanntem Mittelwert und gegebenen Kovarianzen, dann ist mit Hilfe des linearen, diskreten Kalman-Filters eine optimale Schätzung minimaler Varianz für den Systemzustand $\underline{x}$ möglich. Dazu muß die Systembeschreibung in Zustandsvariablenform vorliegen, die bei einer Ausgangsgröße folgende Form annimmt /6/,/8/,/9/:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k+1/k) \underline{x}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k) + \underline{G}(k) \underline{v}(k) \quad (3.2.12)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}^T \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (3.2.13)$$

Das entsprechende Modell in Ein- Ausgangsform war:

$$x(k+1) = -a_1 x(k) - \dots - a_n x(k-n) + b_1 u(k) \dots + b_n u(k-n) \quad (3.2.14)$$

$$y(k) = x(k) + r(k) \quad (3.2.15)$$

Führt man den Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ und den Steuervektor $\underline{u}(k)$ wie folgt ein:

$$\underline{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-n+1)]^T \quad (3.2.16)$$

$$\underline{u}(k) = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n+1)]^T, \quad (3.2.17)$$

dann läßt sich Gl. (3.2.14) in die Zustandsvariablenform von Gl. (3.2.12) überführen mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{a}^T \\ \hline \underline{I}_{[n-1]} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.2.18)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \hline \underline{0}_{[(n-1) \times n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}^T \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

Faßt man $\underline{B}(k) \underline{u}(k)$ zu dem Vektor $\underline{bu}(k)$ zusammen, dann ist:

$$\underline{bu}(k) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n b_i u(k-i+1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

Ein Vergleich der Meßgleichungen ergibt sofort:

$$\underline{c}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (3.2.21)$$

$$w(k) = r(k) \quad (3.2.22)$$

Das gesuchte unverrauschte Ausgangssignal ist das erste Element im

Zustandsvektor $\underline{x}(k)$, dessen Schätzung $\hat{\underline{x}}(k)$ aus folgenden rekursiven Filtergleichungen bestimmbar ist:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) [y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)] \quad (3.2.23)$$

Die extrapolierten Größen sind dabei:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) = \underline{A}(k+1/k) \hat{\underline{x}}(k) + \underline{b}u(k) \quad (3.2.24)$$

$$\hat{y}(k+1/k) = \underline{c}^T \hat{\underline{x}}(k+1/k) \quad (3.2.25)$$

Mit der Kovarianzmatrix $\underline{P}(k) = E \{ \tilde{\underline{x}}(k) \tilde{\underline{x}}^T(k) \}$ des Schätzfehlers $\tilde{\underline{x}}(k) = \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)$ ergibt sich die zeitvariante Filterverstärkung $\underline{K}(k+1)$ aus folgenden Fehler-Kovarianzalgorithmien:

$$\underline{P}(k+1/k) = \underline{A}(k+1/k) \underline{P}(k) \underline{A}^T(k+1/k) + \underline{G}(k) \underline{Q}(k) \underline{G}^T(k) \quad (3.2.26)$$

$$\underline{K}(k+1) = \underline{P}(k+1/k) \underline{c}(k+1) [\underline{c}^T \underline{P}(k+1/k) \underline{c} + R(k)]^{-1} \quad (3.2.27)$$

$$\underline{P}(k+1) = [\underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{c}^T(k+1)] \underline{P}(k+1/k) \quad (3.2.28)$$

Die Kovarianzen $\underline{Q}(k)$, $R(k)$ der weißen Geräusche sind wie folgt definiert:

$$E \{ \underline{v}(k) \underline{v}^T(j) \} = \underline{Q}(k) \delta_{kj} \quad (3.2.29)$$

$$E \{ \underline{w}(k) \underline{w}(j) \} = R(k) \delta_{kj} \quad (3.2.30)$$

$$\text{mit } E \{ \underline{v}(k) \} = \underline{0}, \quad E \{ \underline{w}(k) \} = \underline{0}, \quad E \{ \underline{x}(0) \} = \underline{0} \quad (3.2.31)$$

$$\text{und } E \{ \underline{v}(k) \underline{w}(j) \} = \underline{0}$$

$$E \{ \underline{x}(0) \underline{v}^T(k) \} = \underline{0} \quad (3.2.32)$$

$$E \{ \underline{x}(0) \underline{w}(k) \} = \underline{0}$$

Bei $\hat{\underline{x}}(0) = \hat{\underline{x}}_0$ sind $\underline{P}(0)$, $\underline{Q}(k)$ und $R(k)$ geeignet vorzugeben, z.B.:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_0(o) &= \underline{o} & \underline{P}(o) &= \alpha \underline{I}, & \alpha &= 1 \\ \underline{Q}(k) &= \underline{o} & \underline{R}(k) &= \sigma_r^2\end{aligned}\quad (3.2.33)$$

Da die Systemdynamik nun nicht genau bekannt ist, sondern erst bestimmt werden soll, sind in Gl. (3.2.18) und (3.2.20) die jeweils neuesten Schätzwerte $\{\hat{a}_i, \hat{b}_i\}$ statt der exakten Werte $\{a_i, b_i\}$ einzusetzen. Damit liefert auch die Kalman-Filterung ein parameterabhängiges Hilfsmodell, da ebenso wie beim Verzögerungsmodell die Hilfsvariablenfolge $\{\hat{y}_H(k)\}$ als Funktion der geschätzten Systemparameter $\hat{\underline{p}}(k-1)$ bestimmt wird.

3.2.3 Impulsantwortmodell

Ausgehend von der linearen Systembeschreibung in Ein- Ausgangsform nach Gl. (2.2.4)

$$A(z^{-1}) Y(z) = B(z^{-1}) U(z) + E(z) \quad (3.2.34)$$

$$E(z) = A(z^{-1}) R(z) \quad (3.2.35)$$

oder im Zeitbereich

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + e(k) \quad (3.2.36)$$

$$e(k) = r(k) + a_1 r(k-1) + \dots + a_n r(k-n), \quad (3.2.37)$$

war die Ursache für den Bias der LS-Schätzung im gleichzeitigen Auftreten von autokorreliertem (seriell korreliertem) Rauschen $e(k)$ und Regressoren $y(k-i)$ zu suchen, die selbst mit $e(k)$ korreliert sind. Dividiert man formal Gl. (3.2.34) durch den Operator $A(z^{-1})$, dann ist:

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) + R(z) = X(z) + R(z) \quad (3.2.38)$$

$$\text{wobei} \quad X(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) = D(z^{-1}) U(z) \quad . \quad (3.2.39)$$

Mit Gl. (3.2.39) wird

$$Y(z) = D(z^{-1}) U(z) + R(z) \quad . \quad (3.2.40)$$

Wir erhalten damit formal ein Modell in reduzierter Form, das die mit dem Fehlersignal $E(z)$ korrelierten Variablen nicht mehr enthält und vom Ansatz her biasfreie, konsistente Schätzungen der Parameter d_i ermöglicht. Diese Schätzwerte sind darüber hinaus von minimaler Varianz, falls $R(z)$ gaußverteiltes weißes Rauschen darstellt /32/, /33/.

Gl. (3.2.39) enthält die Identität:

$$\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = D(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{-i} \quad , \quad (3.2.41)$$

die exakt nur für unendlich viele Terme $d_i z^{-i}$ gilt. Im Zeitbereich ist dann mit Gl. (3.2.39):

$$x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i u(k-i) \quad . \quad (3.2.42)$$

Diese Form stellt ein Impulsantwortmodell dar, das die Ein- und Ausgangsgröße allgemein durch folgende Faltungssumme verknüpft /9/:

$$x(k) = \sum_{i=-\infty}^k u(i) g(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) u(k-i) \quad . \quad (3.2.43)$$

Ein Vergleich mit Gl. (3.2.42) zeigt, daß die unbekannten Parameter d_i den Gewichtsfunktionswerten $g(i)$ in Gl. (3.2.43) entsprechen.

In der Praxis wird man die Impulsfolge nach einer endlichen Anzahl von s Termen abbrechen. Dann wird aus der Meßgleichung:

$$\begin{aligned} y(k) &= x(k) + r(k) = \sum_{i=0}^s d_i u(k-i) + r(k) \\ &= d_1 u(k-1) + d_2 u(k-2) + \dots + d_s u(k-s) + r(k) \quad . \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Auch hier ist $d_0 = 0$ angenommen. Für $(N+s)$ -Meßreihen gilt dann entsprechend Gl. (2.2.15):

$$\underline{y} = \underline{U} \underline{d} + \underline{r} \quad (3.2.45)$$

$$\text{mit } \underline{U} = \begin{bmatrix} u(s) & \dots & u(1) \\ u(s+1) & \dots & u(2) \\ \vdots & & \vdots \\ u(s+N-1) & \dots & u(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}^T(s+1) \\ \underline{u}^T(s+2) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(s+N) \end{bmatrix} \quad (3.2.46)$$

$$\underline{y} = [y(s+1), y(s+2), \dots, y(s+N)]^T \quad (3.2.47)$$

$$\underline{d} = [d_1, d_2, \dots, d_s]^T \quad (3.2.48)$$

$$\text{und } \underline{u}(k) = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-s)]^T \quad (3.2.49)$$

Da $\underline{U}$ nur Eingangsgrößen enthält, gilt:

$$E \{ \underline{U}^T \underline{r} \} = \underline{0} \quad (3.2.50)$$

Ein geeigneter Schätzwert für das unverrauschte Ausgangssignal $x(k)$ ist daher:

$$\hat{x}(k) = \underline{u}^T(k) \hat{d}(k) \quad (3.2.51)$$

Die Bestimmung von $\hat{d}$ aus der Regressionsbeziehung (3.2.45) erfolgt durch Minimieren von

$$\| \underline{U} \underline{d} - \underline{y} \| = \| \underline{r} \| \longrightarrow \text{Min} \quad (3.2.52)$$

Zweckmäßigerweise wird dazu das LS-DPR-Verfahren benutzt, so daß gilt:

$$\hat{d} = [\underline{U}^*]^{-1} \underline{y}_1^* \quad (3.2.53)$$

mit folgenden orthogonal transformierten Ausdrücken:

$$\underline{T} \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}^* \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.2.54)$$

$$\underline{T} \underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1^* \\ \underline{Y}_2^* \end{bmatrix} . \quad (3.2.55)$$

Anhand der Simulationsergebnisse erwies sich folgender Wertebereich, aus dem zu wählen ist, als günstig:

$$q \leq s \leq 2q . \quad (3.2.56)$$

Im allgemeinen genügt es, die Schätzung des Ausgangssignals mit $s = q = 2n$ Werten der Impulsfolge durchzuführen.

3.2.4 Zeitinvariantes Modell

Um die Schwierigkeiten des Konvergenzbeweises zeitvarianter Hilfsmodelle zu umgehen, ist man in letzter Zeit von zeitinvarianten Modellen mit festen, vorzugebenden Hilfsparametern $\underline{p}_H$ ausgegangen, wobei allerdings Einschränkungen über das Eingangssignal $u(k)$ getroffen werden müssen. Setzt man wieder einen stabilen Prozeß in Minimalbeschreibung (keine Pol-Nullstellenkompensation) voraus und nimmt man an, daß die Störung $r(k)$ und ebenso das Eingangssignal $u(k)$ weißes Rauschen mit dem Mittelwert 0 und gegebener Kovarianzfunktion sei, dann kann nach /30/ jedes stabile, lineare Modell benutzt werden, um definitionsgemäße Hilfsvariablen $y_H(k)$ zu erzeugen. Es wird dabei auch für das Hilfsmodell verlangt, daß keine gemeinsamen Pole und Nullstellen auftreten. Erweitert man die Klasse von zulässigen Eingangssignalen, dann kann nach /31/ unter den gleichen Voraussetzungen eine "zufällige" Aus-

wahl der Hilfsparameter

$$\{a_{iH}, b_{iH}\} \in \{\{a_{iH}, b_{iH}\} : \text{Modell stabil}\} \quad (3.2.57)$$

getroffen werden, sofern $u(k)$ nur ein PE(n)-Signal ist, also lediglich eine fortlaufende Anregung garantiert. Mit "zufällig" wird dabei die Tatsache beschrieben, daß nicht alle nach Gl. (3.2.57) gewählten Modelle zu einer stabilen Schätzung führen, wohl aber die "meisten". Auch in /29/ wurde gezeigt, daß keine generelle Konvergenz für alle Arten von Systemen, PE-Eingangssignalen und Hilfsmodellen besteht. Es konnte lediglich die Konvergenz für ein System 1.Ordnung nachgewiesen werden.

In den Simulationsläufen wurden die Hilfsparameter wie folgt gewonnen:

$$p_H = \{a_{iH}, b_{iH}\} \in \{p_H = \hat{p}(k) : \text{LS-DPR-Schätzung } \wedge k \geq k_\infty\}. \quad (3.2.58)$$

k_∞ bezeichnet hierbei den kleinsten Wert, von dem ab die LS-DPR-Schätzung $\hat{p}(k)$ stationär geworden ist. Die Verwendung einer LS-Schätzung $\hat{p}(k)$ im IVA-Hilfsmodell setzt keinen erhöhten Aufwand voraus, wenn vor der eigentlichen Kennwertermittlungsphase eine Vorabbestimmung der günstigsten Systemmodellordnung durchgeführt wird (Kapitel 4.1). Da zum Ordnungstest zweckmäßigerweise auch das LS-DPR-Verfahren herangezogen wird, lassen sich die Systemparameter direkt mitbestimmen. Die mit diesem Hilfsmodell erzielten Simulationsergebnisse sind - bei PRBS als Eingangssignal - vergleichbar mit denen des zeitvarianten Verzögerungsmodells.

3.2.5 Vergleich der Hilfsmodelle

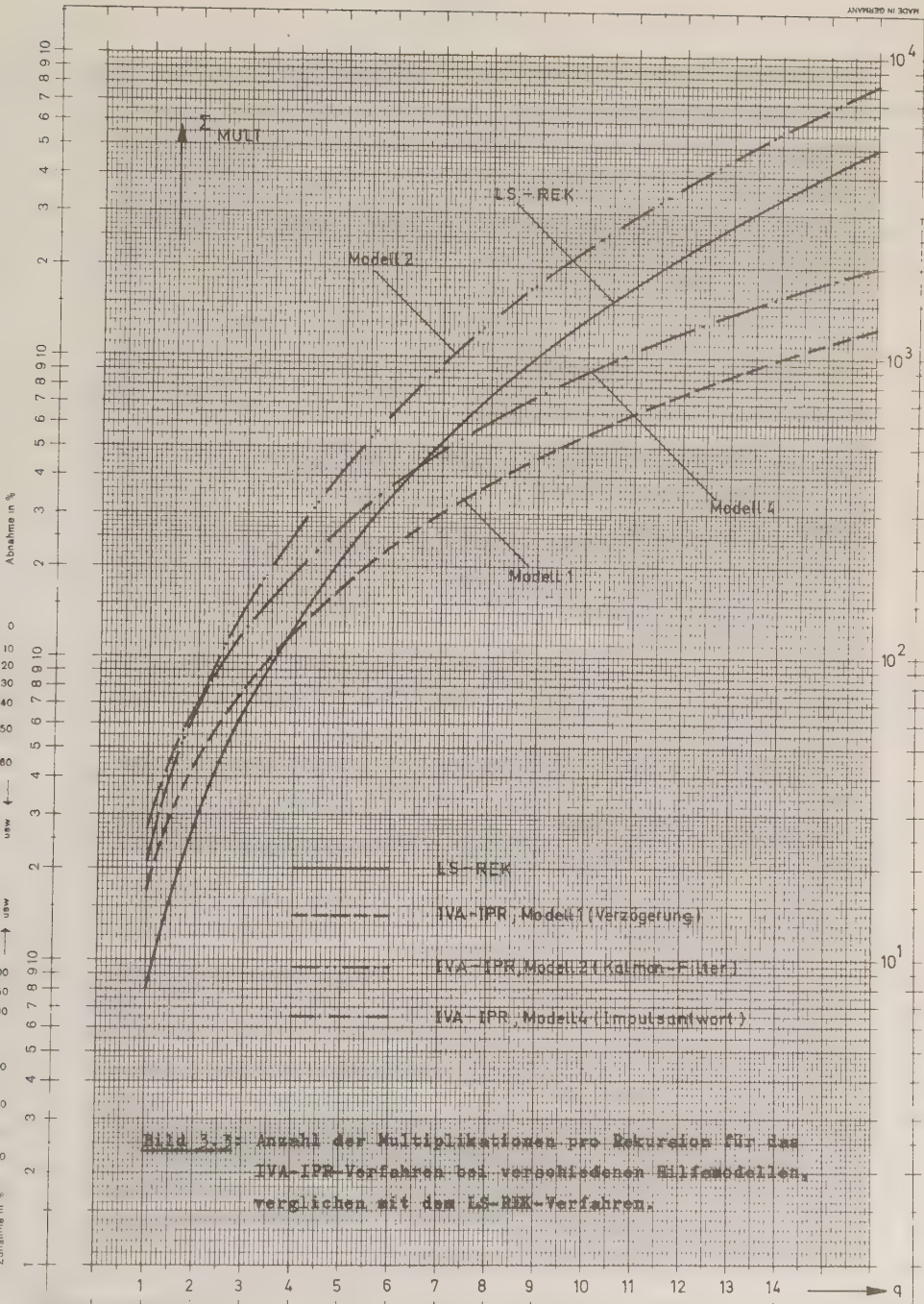
Grundlage eines Vergleichs der verschiedenen Hilfsmodelle ist der numerische Aufwand und die zu erwartende Filterstabilität. Zunächst ist in den Bildern 3.3 und 3.4 die Mindestzahl arithmetischer Operationen in Abhängigkeit von q , der Anzahl der Systemparameter dargestellt, und zwar für die einzelnen

Hilfsmodelle in Verbindung mit dem IVA-IPR-Verfahren und zum Vergleich für das rekursive LS-Verfahren. Es tritt dabei deutlich zutage, daß die Verwendung eines optimalen Kalman-Filters als Hilfsmodell einen erheblich vergrößerten Aufwand an Rechenzeit bewirkt als es mit dem einfachen Verzögerungsmodell (VZ-Modell) der Fall ist. Dies gilt insbesondere in Richtung wachsender System- oder Modellordnung. Durch Verzicht auf die Optimalität des Filters kann dieser hohe Rechenzeitbedarf beträchtlich reduziert werden, indem die zeitvariable Verstärkung $\underline{K}(k+1)$ in Gl. (3.2.23) konstant vorgegeben wird. Man erhält dann einen Beobachter als Zustandsschätzer /7/, ein zeitinvariantes Hilfsmodell, für das die Aussagen und Einschränkungen von Kapitel 3.2.4 gelten.

Andererseits ist das optimale Filter ebenso wie das einfache VZ-Modell von den geschätzten Systemparametern abhängig. Bei geeigneter Wahl der Filterparameter ist daher die Stabilität beider Hilfsmodelle als vergleichbar anzusehen. Eine entsprechende Stabilitätsaussage gilt auch für einen Beobachter bezüglich eines einfacheren, festen Hilfsmodells. Berücksichtigt man weiterhin den größeren numerischen Aufwand, dann ist die Benutzung eines auf der Kalman-Filterung basierenden Hilfsmodells wenig vorteilhaft.

Auch die Realisierung des Impulsantwortmodells ist naturgemäß mit größerem Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf verbunden, verglichen mit dem VZ-Modell. Bei q Modellparametern ist die Rechenzeit aber schon für $n \geq 3$ kleiner als die des LS-REX-Verfahrens. Weiterhin ist die Tatsache zu berücksichtigen, daß das Impulsantwortmodell die geschätzten Parameter $\hat{p}(k)$ nicht direkt enthält, sondern die Hilfsparameter $\hat{p}_H$ aus Meßwerten über die numerisch sehr stabile LS-DPR-Strategie bestimmt. Damit ist das Impulsantwortmodell besonders für den Einsatz von Prozeßrechnern kleinerer Wortlängen geeignet.

Bei einem geeigneten festen Hilfsmodell, dessen Aufwand vernachlässigbar ist, kann und muß die Filterstabilität vorausgesetzt werden. Allerdings ist die Konvergenz dieses IVA-Verfahrens stark von den Eingangssignalen abhängig,



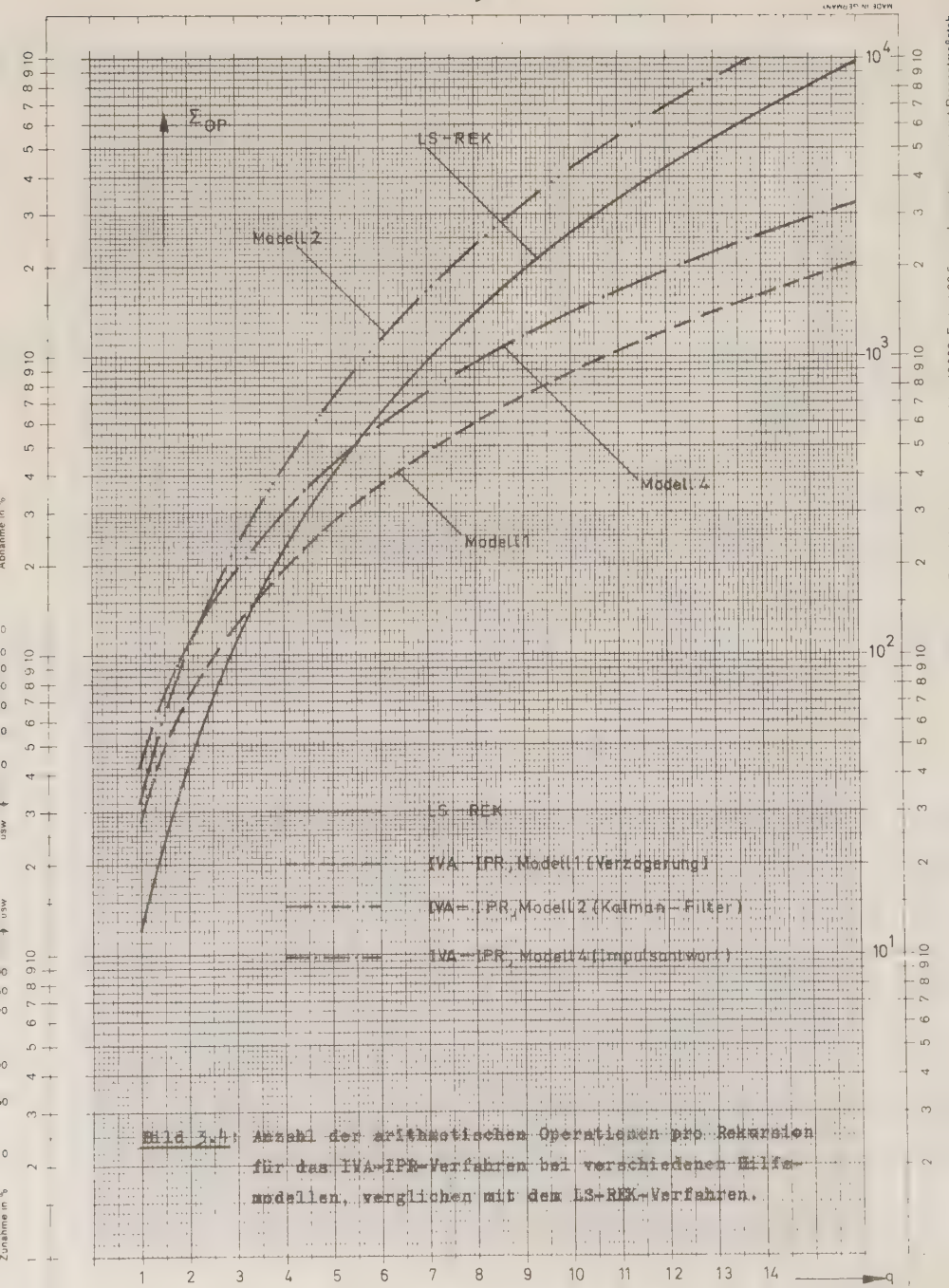


Bild 3.4: Anzahl der arithmetischen Operationen pro Rekursion für das IVA-IPR-Verfahren bei verschiedenen Hilfsmodellen, verglichen mit dem LS-REK-Verfahren.

was insbesondere dann problematisch ist, wenn nur Testsignale aus dem laufenden Betrieb des Prozesses zur Verfügung stehen. Weiterhin ist mit Schwierigkeiten zu rechnen, wenn (langsam) veränderliche Systemparameter auftreten. Im folgenden wird als Hilfsmodell immer das einfache Verzögerungsmodell bezeichnet, das sich in der Simulation als sehr unproblematisch erwies.

3.3 Startwerte

Sämtliche rekursiv gestalteten Algorithmen verlangen definierte Anfangswerte. Die 2-stufigen Hilfsvariablenverfahren setzen gegenüber den entsprechenden LS-Verfahren noch zusätzliche Startwerte zur Gewinnung der Hilfsparameter $\hat{p}_H$ des Verzögerungsmodells voraus. Tabelle 3.2 gibt eine Übersicht der benötigten Anfangswerte bei den einzelnen Verfahren.

Verfahren	LS	IVA
REK	$\hat{p}(o) = \underline{o}, \underline{p}(o) = \alpha \underline{I}$	$\hat{p}(o) = \hat{p}_H(o) = \underline{o}, \underline{p}(o) = \alpha \underline{I}$
UVEX	$\underline{z}_H(o) = \underline{o}$	$\underline{z}_H(o) = \underline{o}, \hat{p}_H(o) = \underline{o}$
DPR	$\underline{z}^*(o) = \underline{o}$	
IPR	$\underline{z}_H(o) = \underline{o}, \underline{z}_H^*(o) = \underline{o}$	$\underline{z}_H(o) = \underline{o}, \underline{z}_H^*(o) = \underline{o}, \hat{p}_H(o) = \underline{o}$

Tabelle 3.2: Startwerte der einzelnen Verfahren

Da die Kennwertermittlung bei den IVA-Verfahren von Null verschiedene Hilfsvariablen y_H voraussetzt, das VZ-Modell aber die ermittelten Parameter selbst enthält, ist ein Anlauf mit den in Tabelle 3.2 angegebenen Werten nur für das rekursive Verfahren möglich, da der Gewichtsmatrix $\underline{p}(o)$ Startwerte ungleich

Null zuzuweisen sind. Das UVEX- und ebenso das IPR-Verfahren der IVA-Methode benötigen dagegen eine "Starthilfe", da sämtliche Anfangswerte zweckmäßigerweise gleich Null gesetzt werden. Bei den LS-Verfahren ist das Starten unproblematisch, da die gesuchten Parameter $\hat{p}$ nur von den Meßwerten abhängig sind.

Ein sinnvolles und stabilisierend wirkendes Anlaufen erzielt man nun dadurch, daß in einem bestimmten Anfangsintervall von N_0 Abtastschritten die Hilfsvariablen $y_H(k)$ durch die entsprechenden Meßwerte $y(k)$ ersetzt werden:

$$y_H(k) = y(k) \quad \text{für } k \leq N_0 > q. \quad (3.2.1)$$

Dann ist der Anlauf gesichert, und mit

$$\underline{W}^T \underline{M}(k) = \underline{M}^T \underline{M}(k) \quad \text{für } k \leq N_0 \quad (3.2.2)$$

hat die charakteristische Matrix $\underline{W}^T \underline{M}(k)$ im kritischen Anfangsintervall positiv definiten Charakter. Führt man beim IPR-Verfahren die Reduktionen anfänglich nicht mit den jeweiligen Zeilen $\underline{z}_{Hi}^T(k)$ aus der Matrix $\underline{Z}_H(k) = [\underline{W}^T \underline{M}(k) \mid -\underline{W}^T \underline{y}(k)]$ durch, sondern reduziert direkt den neuesten Meßwertvektor $\underline{z}^T(k)$, mit $\underline{z}^T(k) = [\underline{m}^T(k) \mid -y(k)]$, dann ergeben sich im Startintervall die für die Verfahrensstabilität so günstigen Eigenschaften des direkten pseudorekursiven LS-Verfahrens.

Vom Gesichtspunkt der numerischen Stabilität her sollte N_0 möglichst groß sein, aus statistischen Gründen ist N_0 möglichst klein zu wählen. Aufgrund empirischer Untersuchungen ergibt sich als Kompromiß der folgende günstige Wertebereich für N_0 :

$$5 \leq N_0/n \leq 50. \quad (3.2.3)$$

Den Simulationsergebnissen liegt der Wert $N_0 = 10n$ zugrunde, bei Prozeßrechnern kleinerer Wortlänge sollte N_0 größer gewählt werden.

3.4 Bewertung des neuen Verfahrens

Grundlage des neuen IPR-Verfahrens ist die bekannte, statistische Hilfsvariablentheorie, die über ein geeignetes Hilfsmodell biasfreie und konsistente Parameterschätzungen ermöglicht. Da wir auch von im wesentlichen bekannten Hilfsmodellen ausgegangen sind, ist die Bedeutung des IPR-Verfahrens ausschließlich im numerischen Bereich hinsichtlich verbesserter Stabilität und Eindeutigkeit der geschätzten Parameter zu sehen. Die Bewertung und Einordnung des IVA-IPR-Verfahrens erfolgt daher nach Gesichtspunkten der numerischen Stabilität und des numerischen Aufwandes. Ausgehend von den Abschätzungen nach Gl. (2.4.62) und Gl. (3.1.60) gilt für die einzelnen Verfahren folgende Abschätzung der Konditionszahlen:

$$\text{cond}(\underline{M}) < \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) \leq \text{cond}(\underline{H} \underline{W}^T \underline{M}) < \text{cond}(\underline{W}^T \underline{M})$$

$$\text{LS-DPR} \quad \text{LS-UVEX, REK} \quad \text{IVA-IPR} \quad \text{IVA-UVEX, REK} \quad (3.4.1)$$

Nach Gl. (3.4.1) sind die Hilfsvariablenverfahren (IVA) i.a. schlechter konditioniert als die entsprechenden Least-squares-Verfahren (LS), wobei das indirekt-pseudorekursive-Verfahren (IPR) die Kondition des universell-expliziten (UVEX) bzw. rekursiven Verfahrens (REK) verbessert.

Bei dem im Anhang A1 dargestellten Korrelationsverfahren (KOR) entspricht die grundlegende Schätzgleichung völlig der des LS-Verfahrens. Es ist jedoch zu beachten, daß rein formal die Meßwerte durch entsprechende Korrelationsfunktionen ersetzt werden, die sich aus dem Produkt von Meßwerten ergeben. Daher ist die Kondition des KOR-Verfahrens der Kondition der LS-UVEX-Methode gleichzusetzen:

$$\text{cond}(\text{KOR}) \hat{=} \text{cond}(\underline{M}^T \underline{M}) \quad (3.4.2)$$

Da alle übrigen in statistischer Hinsicht verbesserten Verfahren von einem um ein Störmodell erweiterten Systemmodell ausgehen, sind diese Verfahren

prinzipiell schlechter konditioniert als das LS-UVEX-Verfahren, da zusätzliche Störparameter zu bestimmen sind (Satz 3.3).

Damit läßt sich eine Klassifizierung der einzelnen Verfahren nach der für die Konvergenz und Stabilität wesentlichen Konditionszahl durchführen, wie dies schematisch im Bild 3.3 angedeutet ist. Dieses Schema kann nur eine 1. Näherung darstellen, da die charakteristischen Verhältnisse der übrigen Schätzverfahren untereinander nur pauschal erfaßt werden. Von allen verbesserten Verfahren ist aber das KOR-Verfahren am besten konditioniert und das IVA-IPR-Verfahren kommt dem am nächsten. Eine gewisse Herabsetzung der IVA-UVEX-Konditionszahl läßt sich auch mit der im Anhang A3 beschriebenen stochastisch erweiterten (STOCHE) und der modifizierten Form (MODIF) des UVEX-Verfahrens erreichen. Beide Verfahren beruhen auf dem Prinzip, die Hauptdiagonalelemente stärker zu bewerten, ohne allerdings eine positiv definite Form herstellen zu können. Da andererseits die Änderungen der Diagonalelemente nur sehr klein sein dürfen, um das vorausgesetzte "benachbarte" System zu erhalten, kann mit diesen Verfahren kein wesentlicher Stabilisierungseffekt erzielt werden, wie die Simulationsergebnisse auch gezeigt haben.

Das herausragende Merkmal der rekursiven Hilfsvariablenmethode lag darin, daß diese Form von allen verbesserten Verfahren den geringsten numerischen Aufwand an Speicherplatz und arithmetischen Operationen verlangt. Gegenüber dem LS-REK-Verfahren ist dieser Aufwand nur um das einfache Hilfsmodell erweitert. Aus dem Vergleich nach Tabelle 1.5.2 geht andererseits deutlich hervor, daß der Aufwand des KOR-Verfahrens erheblich höher liegt.

Vergleicht man weiterhin den numerischen Aufwand der einzelnen IVA-Verfahren untereinander, dann ergeben sich die in Tabelle 3.3 und in den Bildern 3.6 bis 3.9 dargestellten Verhältnisse, wobei das Hilfsmodell jeweils noch hinzuzurechnen ist.

cond (A)

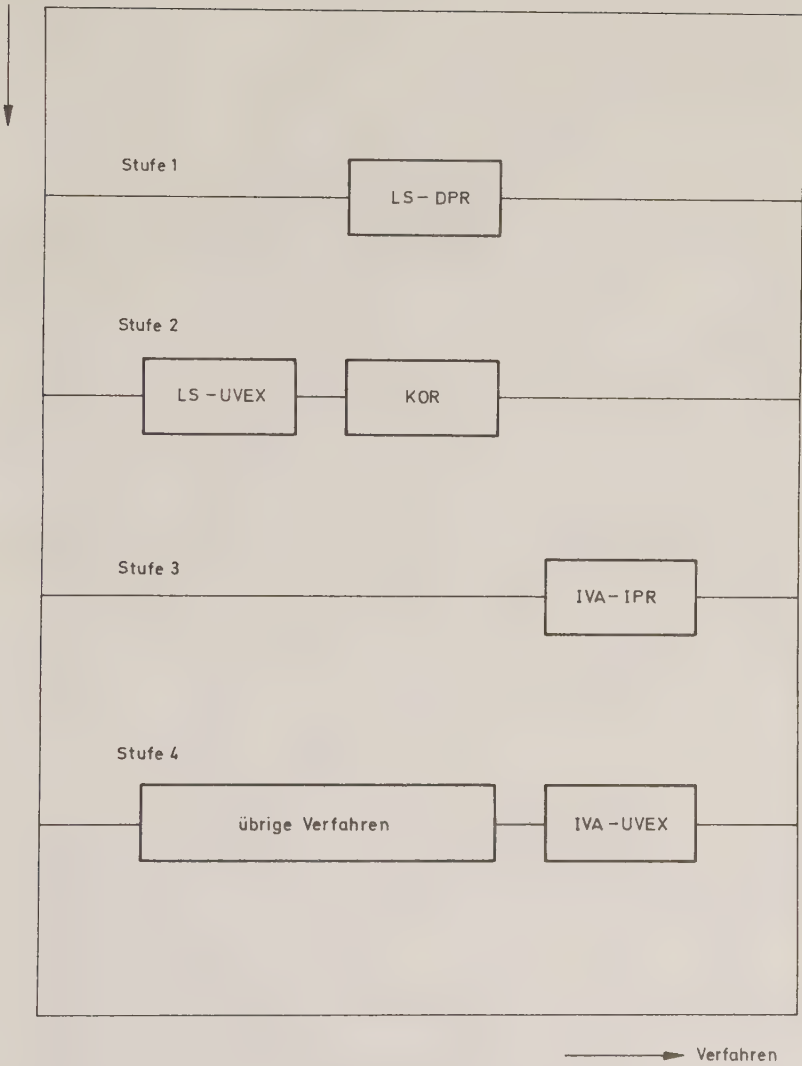


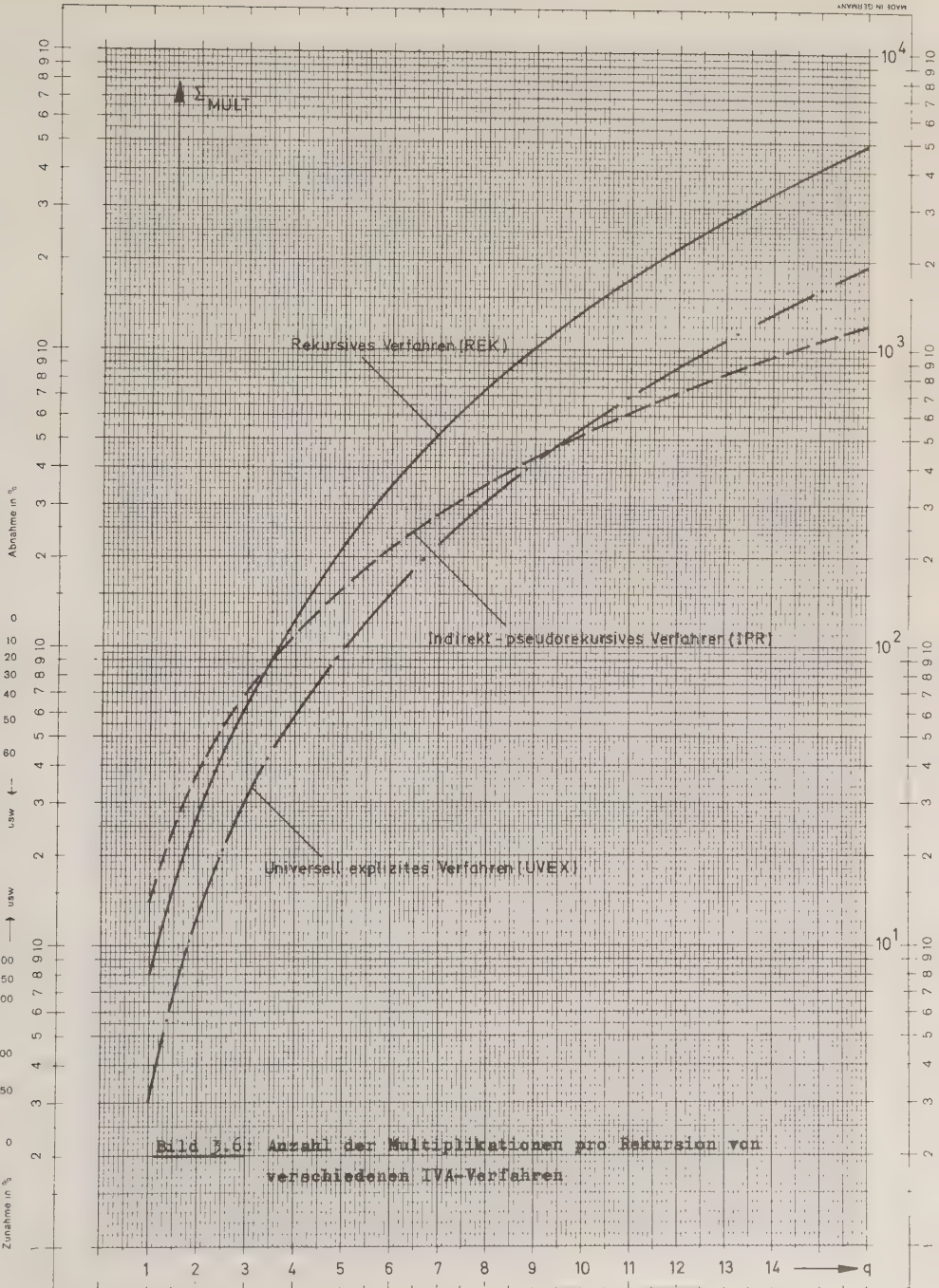
Bild 3.5: Schematische Einordnung der Schätzverfahren nach der Konditionszahl

Verfahren	Multiplikationen	Additionen	Speicherplätze
DPR	$\frac{5}{2} q^2 + \frac{21}{2} q$	$\frac{3}{2} q^2 + \frac{7}{2} q$	$q^2 + 4q + 1$
REK	$q^3 + 3q^2 + 4q$	$q^3 + 2q^2 + q$	$2q^2 + 5q$
UVEX	$\frac{1}{3} q^3 + 2q^2 + \frac{5}{3} q$	$\frac{1}{3} q^3 + 2q^2 + \frac{2}{3} q$	$2q^2 + 5q$
IPR	$4q^2 + 12q$	$\frac{5}{2} q^2 + \frac{9}{2} q$	$2q^2 + 6q + 1$
STOCHE	$\frac{4}{3} q^3 + 4q^2 + \frac{11}{3} q$	$\frac{4}{3} q^3 + 2q^2 - \frac{1}{3} q$	$3q^2 + 5q$
MODIF	$\frac{1}{3} q^3 + 4q^2 + \frac{14}{3} q$	$\frac{q^3}{3} + 4q^2 + \frac{17}{3} q - 5$	$2q^2 + 8q$
Hilfsmodell	$3q$	$3q$	q

Tabelle 3.3: Numerischer Aufwand der einzelnen numerischen Verfahren
(ohne Hilfsmodell)

Aus diesen Darstellungen ist ersichtlich, daß das IPR-Verfahren von allen verbesserten Verfahren die günstigsten numerischen Eigenschaften hat, und daß es sich gegenüber der rekursiven Form durch eine beträchtlich reduzierte Zahl arithmetischer Operationen auszeichnet, während der benötigte Speicherplatz beider Verfahren etwa gleich groß ist. Darüber hinaus hat das IPR-Verfahren die günstigere Konditionszahl und verlangt nur Startwerte gleich Null.

Tabelle 3.3 enthält auch den nahezu vernachlässigbaren numerischen Aufwand des einfachen Verzögerungs-Hilfsmodells und zum Vergleich den Aufwand des LS-DPR-Verfahrens.



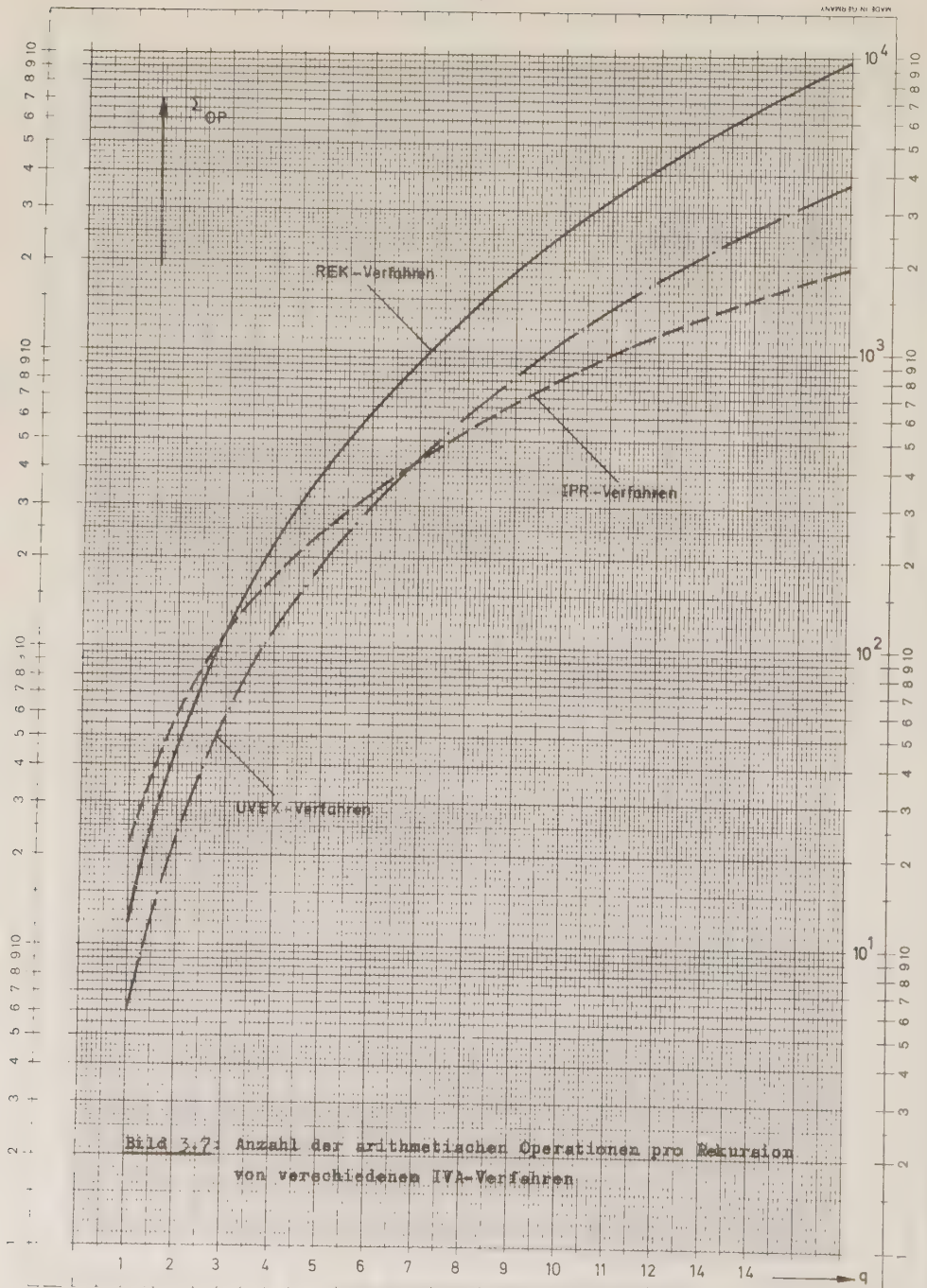
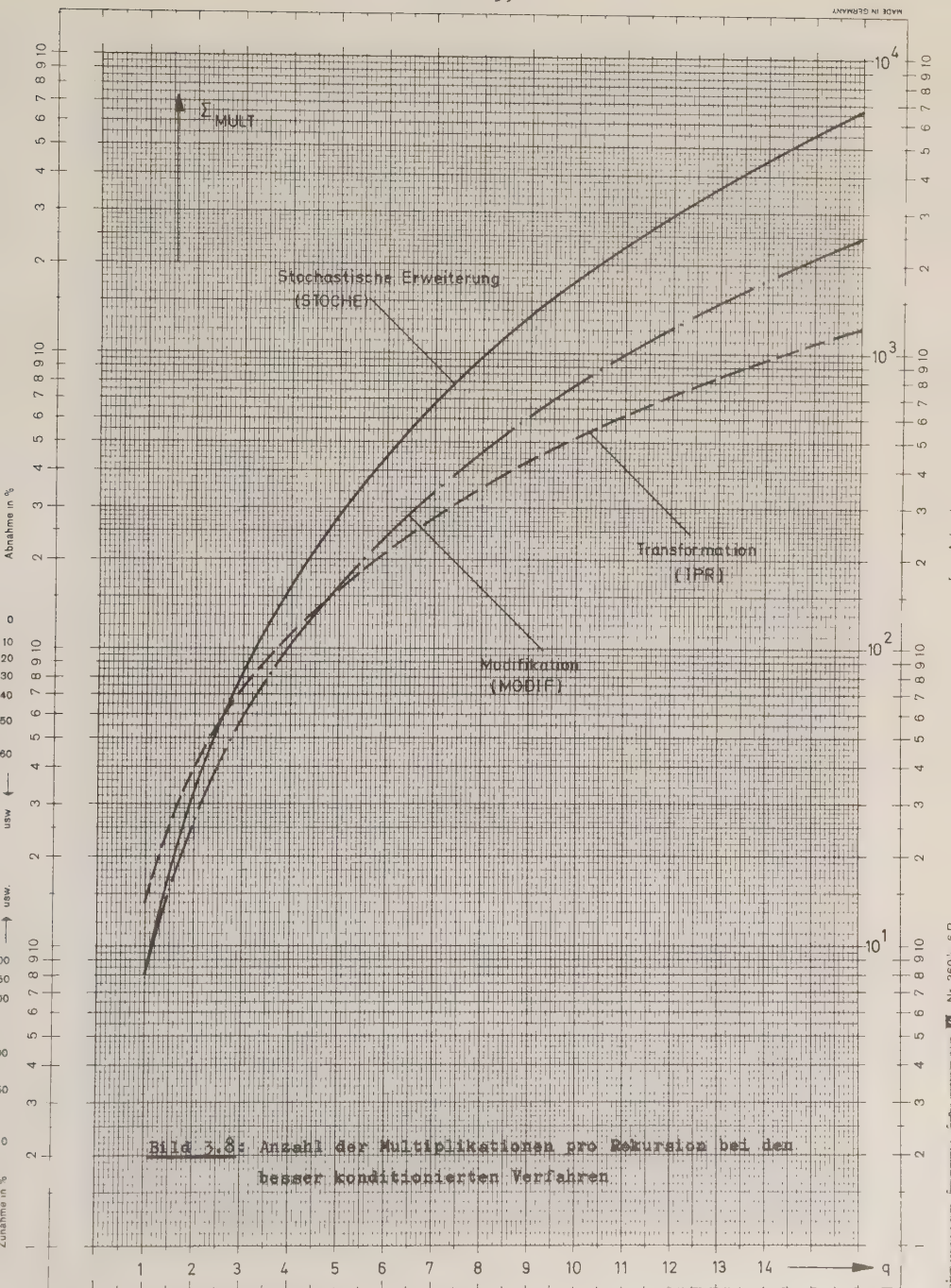
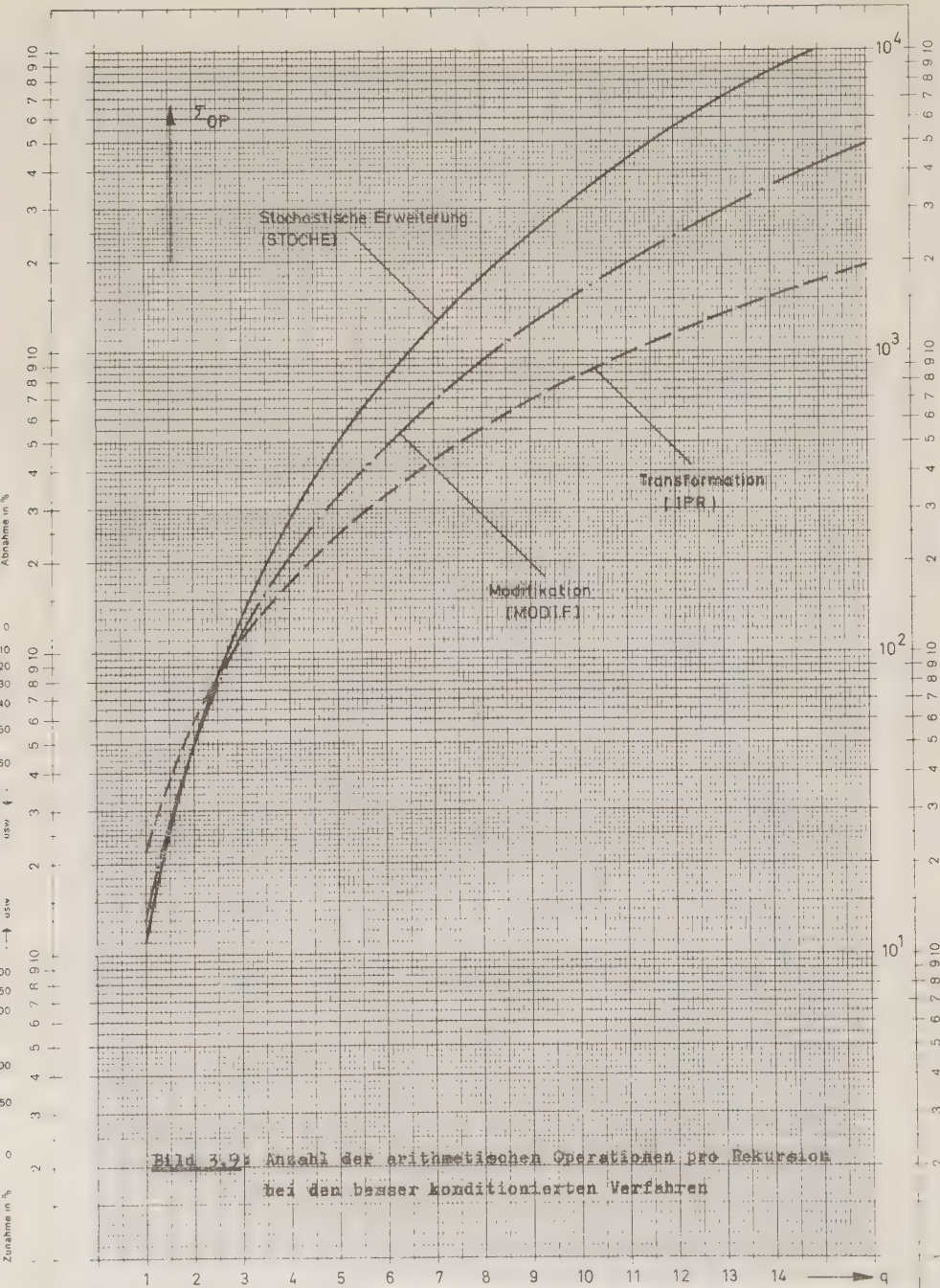


Bild 3.7: Anzahl der arithmetischen Operationen pro Rekursion von verschiedenen IVA-Verfahren





4. Grundstruktur und Erweiterungen

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf eine Kennwertermittlung lediglich der Regelstrecke, mit statistisch unabhängigem Eingangs- und Störsignal. Das Prozeßmodell wurde in zeitdiskreter Form mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße angenommen. Es soll nun eine Erweiterung auf den Mehrgrößenfall vorgenommen werden und Möglichkeiten zur Kennwertermittlung im geschlossenen Regelkreis mit dem IVA-IPR-Verfahren aufgezeigt werden.

Es wurde bisher weiterhin vorausgesagt, daß die Ordnung der Prozeß-Übertragungsfunktion der des Systemmodells genau gleich ist. In der Praxis wird man aber die Modellordnung n erst suchen müssen, die den unbekannten Prozeß am besten oder zumindest hinreichend beschreibt. Da andererseits die Eindeutigkeit des IVA-Schätzergebnisses in erheblichem Maße von der gewählten Modellordnung abhängt, sind Strukturprüfverfahren zur Vorabbestimmung von n notwendige Voraussetzung der Kennwertermittlung /47/, /48/, /49/.

4.1 Modellordnung

Während die Modellverifizierung im Anschluß an die Struktur- und Kennwertermittlung durchzuführen ist, wobei die geschätzten Parameter i.a. statistischen Tests unterworfen werden, kann die Vorabbestimmung der zu wählenden Modellordnung ohne die Berechnung von Parametern erfolgen. Dazu eignen sich Strukturprüfverfahren, die sich unmittelbar aus dem direkten pseudorekursiven LS-Verfahren, genauer aus der orthogonal transformierten Dreiecksmatrix $\underline{Z}^*(k+1)$ ergeben.

Da das LS-Verfahren, wie auch alle verbesserten Verfahren, die Summe der Fehlerquadrate Q minimiert, müßte bei hinreichend großem Meßintervall Q

dann minimal werden, wenn n der exakten Systemordnung n_0 genau gleich ist. Dies gilt, sofern das verwandte Verfahren biasfreie Schätzwerte zu liefern vermag.

Damit kann die Fehlerquadratsumme Q zur Strukturprüfung herangezogen werden.

Nach Gl. (2.2.113) ist:

$$Q = \|\underline{e}\|^2 = \underline{e}^T \underline{e} = y_2^*(k+1)^2 = z_{q+1, q+1}^{*2} \quad (4.1.1)$$

Das einfache LS-DPR-Verfahren liefert demnach direkt den Summenfehler $\|\underline{e}\|$, der als Element $(q+1, q+1)$ in der zusammengefaßten Matrix

$$\underline{Z}^*(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} \underline{M}^*(k+1) & -\underline{y}_1^*(k+1) \\ \hline \underline{0} & -\underline{y}_2^*(k+1) \end{array} \right] [(q+1)x(q+1)] \quad (4.1.2)$$

erscheint.

Ordnet man nun den in Gl. (2.2.9) definierten Meßwertvektor $\underline{m}^T(k)$ wie folgt an:

$$\underline{m}^T(k) = [-y(k-1), u(k-1) \mid -y(k-2), u(k-2) \mid \dots \mid -y(k-n), u(k-n)], \quad (4.1.3)$$

dann läßt sich über eine leichte Modifikation des orthogonalen Transformationsverfahrens nicht nur der Summenfehler $\|\underline{e}\|$ für die gewählte Maximalordnung $\hat{n}$ bestimmen, sondern sofort sämtliche Summenfehler für alle Ordnungen von $n=1$ bis $n=\hat{n}$ einschließlich $/22/$. Um die Modellordnung $n=n_0$ mit Hilfe des REK- oder UVEX-Verfahrens zu bestimmen, muß der gesamte Prozeß der Kennwertermittlung für unterschiedliche Ordnungen durchgeführt werden, d.h. mindestens $n_0 + 1$ - mal. Verwendet man dagegen das modifizierte LS-DPR-Verfahren, dann erfolgt die Datenreduktion nur noch für eine einzige

Modellordnung, für die Maximalordnung $\hat{n} > n_0$, ohne die Kennwerte selbst berechnen zu müssen.

Bei N Meßwerten gilt nach Gl. (2.2.22):

$$Q = \|\underline{e}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{N+n} e^2(k) \quad (4.1.4)$$

Gehen wir von einem festen Meßintervall N aus, dann läßt sich für $N = \text{const}$ folgende Verlustfunktion definieren:

$$V(n) = \frac{1}{N} Q(n) = \frac{1}{N} \|\underline{e}(n)\|^2 \quad (4.1.5)$$

Im ungestörten Fall ist dann (Bild 4.1):

$$V(n) = \begin{cases} V_n \neq 0 & \text{für } n < n_0 \\ 0 & \text{für } n \geq n_0 \end{cases} \quad (4.1.6)$$

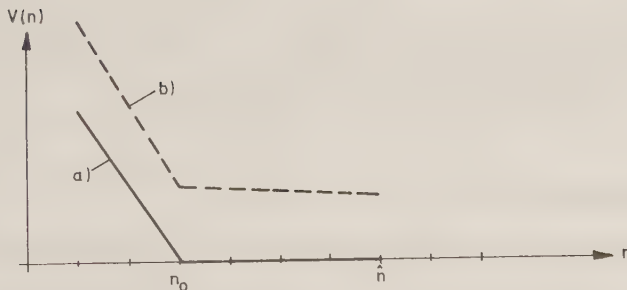


Bild 4.1: Qualitativer Verlauf der Verlustfunktion $V(n)$ im
a) ungestörten und b) gestörten Fall

Da bei verrauschten Meßwerten die LS-Methode keine biasfreien Schätzwerte liefern kann, zeigt auch die Verlustfunktion bei $n=n_0$ kein ausgeprägtes Minimum. Stattdessen nimmt die Verlustfunktion auch im Bereich $n > n_0$ noch

weiter ab, allerdings in unerheblichem Maße, wie es im Bild 4.1 qualitativ angedeutet ist /47/.

Als die wahrscheinlichste Modellordnung ist daher derjenige Wert n anzunehmen, von dem ab sich die Verlustfunktion $V(n)$ nicht mehr signifikant verändert.

Ein weiteres einfaches Maß zur Vorabbestimmung der Ordnung des Systemmodells ist das Determinantenverhältnis:

$$DV(n) = D(n+1)/D(n) \quad (4.1.7)$$

mit
$$D(n) = \det(\underline{Z}^*) = \prod_{i=1}^n z_{i,i}^* \quad (4.1.8)$$

Da sich die Determinante der Dreiecksmatrix $\underline{Z}^*$ aus dem Produkt der Diagonalelemente $z_{i,i}^*$ ergibt, ist das Verhältnis $DV(n)$ mit sehr geringem Aufwand bestimmbar, und es kann als Maß für die Eindeutigkeit der zu erwartenden Schätzung angesehen werden. Rein qualitativ ergibt sich im gestörten und ungestörten Fall der gleiche im Bild 4.1 skizzierte prinzipielle Verlauf. Als Modellordnung ist dann ebenfalls derjenige Wert n anzunehmen, von dem ab sich $DV(n)$ nicht mehr signifikant ändert.

4.2 Konditionstest

Bestimmend für die Kondition und damit für die Genauigkeit einer Parameterschätzung sind neben dem Verfahren selbst die gewählte Modellordnung n und die Abtastzeit T_0 . Um sich nun einen Überblick zu verschaffen, mit welcher Konditionszahl bei vorgegebener Abtastzeit und der jeweiligen Modellordnung zu rechnen ist, wird ein Konditionstest vorgeschlagen, der einfach durchführbar ist und sich direkt aus der Vorabbestimmung der Modellordnung ergibt. Grundlage des Konditionstests ist demnach die obere Dreiecksmatrix $\underline{Z}^*(k+1)$ des LS-DPR-Verfahrens.

Im einführenden Kapitel 2.4 hatten wir mit Gl. (2.4.40):

$$K_M = \max_{1 \leq i, k \leq q} \frac{z_{ii}^*}{z_{kk}^*} \leq \text{cond}(\underline{Z}^*) \quad (4.2.1)$$

die Minimalkonditionszahl K_M für eine Dreiecksmatrix $\underline{Z}^*$ eingeführt, die eine Abschätzung der Spektralkonditionszahl $K_S(\underline{Z}^*) = \text{cond}(\underline{Z}^*)$ nach unten darstellt. Aus empirischen Untersuchungen ergab sich in Übereinstimmung mit /36/, daß bei einem System n_0 -ter Ordnung die tatsächlichen Verhältnisse durch K_M recht gut beschrieben werden, wenn die Modellordnung n aus folgendem Bereich gewählt wird:

$$1 \leq n \leq n_0. \quad (4.2.2)$$

Im Bereich $n > n_0$ ist K_M dagegen zu klein, die Beurteilung der Parametergenauigkeit dann zu optimistisch.

Da sich K_M als Verhältnis von größtem zu kleinstem Diagonalelement der Matrix $\underline{Z}^*(k+1)$ ergibt, ist dieses Konditionsmaß mit sehr geringem Aufwand bestimmbar. Darüber hinaus werden die Diagonalelemente z_{ii}^* auch zur Bestimmung von $DV(n)$ nach Gl. (4.17) benötigt.

Die Definition von K_M nach Gl. (4.2.1) ist ein Konditionsmaß $K_M(n)$ für das direkte pseudorekursive LS-Verfahren. Nach der Abschätzung von Gl. (3.4.1) ist für das indirekt-pseudorekursive IVA-Verfahren zumindest mit dem quadrierten Wert von $K_M(n)$ zu rechnen, da für die charakteristische Dreiecksmatrix $\underline{Z}_H^*(k+1)$ nach Gl. (3.4.1) und Gl. (3.29) gilt:

$$\text{cond}(\underline{Z}^*)^2 \approx \text{cond}(\underline{Z}_H^*) \leq \text{cond}(\underline{Z}_H) . \quad (4.2.3)$$

Unter Berücksichtigung der endlichen Wortlänge wurde im Kapitel 2.4.4 gezeigt, daß man i.a. keine auch nur näherungsweise richtige Lösung für ein

Gleichungssystem im Bereich

$$K_S(\underline{Z}_H^*) \geq q^{-1/2} 2^t \quad (4.2.4)$$

garantieren kann. Dies folgt aus Gl. (2.4.91). Bei einer 38-stelligen Mantisse (TR 440) ist der Faktor 2^t von der Größenordnung

$$2^t \approx 10^{11} \quad (4.2.5)$$

Aus umfangreichen Simulationsstudien an der Großrechenanlage TR 440 ergab sich, daß die Eindeutigkeit bzw. Stabilität des IVA-IPR-Verfahrens nicht mehr gewährleistet ist, wenn $K_S(\underline{Z}_H^*)$ die Größenordnung $10^7 - 10^8$ erreicht. Mit Gl. (4.2.3) und der Ungleichung

$$K_M(\underline{Z}_H^*) \leq K_S(\underline{Z}_H^*) \quad (4.2.6)$$

läßt sich dann folgende kritische Grenze für die Konditionszahl $K_M(\underline{Z}^*)$ definieren:

$$K_{M \text{ krit}}(\underline{Z}^*) \approx 10^3 \quad (4.2.7)$$

Ergibt der Konditionstest nach Gl. (4.2.1) einen Wert

$$K_M(n) \geq K_{M \text{ krit}} \quad (4.2.8)$$

dann ist nach geeigneten Methoden zu suchen, die die Kondition des Systemmodells zu verbessern. Dies läßt sich in erster Linie durch Vergrößern der Abtastzeit T_0 erreichen. In vielen Fällen ist dann auch gleichzeitig die Modellordnung zu reduzieren, sofern die schnellen Eigenbewegungen gemäß dem Shannon'schen Abtasttheorem nicht mehr erfaßbar werden.

Die kritische Grenze nach Gl. (4.2.7) gilt für eine Großrechenanlage von beispielsweise $t=38$ -stelliger Mantisse. Für Prozeßrechner mit kleinerer Stellenzahl muß diese Grenze naturgemäß zurückgenommen werden. Allerdings

liegt noch sehr wenig Erfahrung darüber vor, in welchem Maße dies geschehen muß.

4.3 Identifizierung im geschlossenen Regelkreis /50/-/57/

Geht man von einer offenen Übertragungskette aus, dann läßt sich statistische Unabhängigkeit von Eingangssignal $u(k)$ und Störsignal $r(k)$ bzw. $e(k)$ annehmen und es gilt gemäß Gl. (2.2.41):

$$\underline{R}_{ue} = \frac{1}{N} E \left\{ \underline{M}_u^T \underline{e} \right\} = \underline{0} \quad (4.3.1)$$

Ist man jedoch auf eine Identifizierung im geschlossenen Regelkreis angewiesen, dann sind infolge der Rückkopplung $u(k)$ und das seriell korrelierte Signal $e(k)$ kreuzkorreliert. Damit ist $\underline{R}_{ue} \neq \underline{0}$, die Schätzung enthält einen Bias, der sich durch keines der verbesserten Schätzmethoden abbauen läßt. Weiterhin besteht keine eindeutige Zuordnung von Eingangs- und Ausgangsgröße mehr. Um auch im geschlossenen Kreis eindeutige und biasfreie bzw. konsistente Schätzungen der Streckenparameter p_1 zu erhalten, ist die in den Meßwerten $\{u(k), y(k)\}$ enthaltene Information nicht mehr ausreichend. Geht man von einer Struktur des Regelkreises nach Bild 4.2 aus, dann wird i.a. verlangt, daß die Übertragungsfunktion des Reglers $F_R(z)$ bekannt und ein weiteres Signal $v(k)$ am Reglerausgang vorhanden ist, das als stationär und unkorreliert mit $r(k)$ vorausgesetzt wird. $v(k)$ kann determiniert wie rein stochastisch sein.

Betrachtet man $v(k)$ als unabhängige Eingangsgröße, dann ist das korrelierte Signal $u(k)$ eliminierbar, und es gilt gemäß Bild 4.2:

$$Y(z) = \frac{F_S(z)}{1 + F_O(z)} V(z) + \frac{1}{1 + F_O(z)} R(z) \quad (4.3.2)$$

$$\text{mit} \quad F_O(z) = F_R(z) F_S(z) \quad (4.3.3)$$

$$\text{und} \quad V(z) = U(z) - U_R(z) \quad (4.3.4)$$

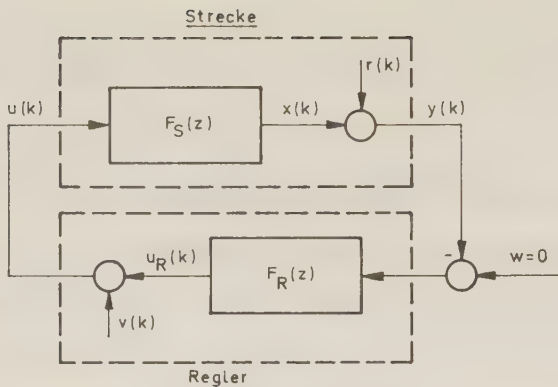


Bild 4.2: Struktur des geschlossenen Kreises

Nach Gl. (4.3.2) ist $F_1(z) = Y(z)/V(z)$ ein Modell für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $Y(z)/V(z)$. Die gesuchten Parameter des Streckenfrequenzganges $\hat{F}_S(z)$ werden damit indirekt bestimmt, da sich $\hat{F}_S(z)$ erst durch Rückrechnung aus $F_1(z)$ ergibt:

$$\hat{F}_S(z) = \frac{\hat{F}_1(z)}{1 - \hat{F}_R(z) \hat{F}_1(z)} \quad (4.3.5)$$

Setzt man die Existenz eines unabhängigen Stör- oder Nutzsignals $v(k)$ voraus, dann sind nach /52/ die Streckenparameter p_1 auch direkt aus den Meßwerten $\{u(k), y(k)\}$ identifizierbar, sofern ein Modell für die Systemstörungen vorhanden ist. Asymptotisch sind dann gleichwertige Ergebnisse der direkten und der indirekten Methode zu erwarten. Weiterhin wird in /57/ für die direkte Methode gezeigt, daß Voraussetzung für gesicherte Eindeutigkeit der Schätzung $\hat{p}$ die Existenz zweier stationärer, unkorrelierter PE(n)-Störprozesse im Regelkreis ist.

Um die Streckenparameter p im geschlossenen Kreis mit Hilfe der IVA-Methode zu bestimmen, wird ebenfalls verlangt, daß ein Signal $v(k)$ gemäß Bild 4.2 auf den Regelkreis einwirkt, der als asymptotisch stabil vorausgesetzt wird. Dieses Signal unterliegt den gleichen Bedingungen, die für das Eingangssignal $u(k)$ im offenen Kreis galten. Demnach muß $v(k)$ ein stationäres PE(n)-Signal sein, das mit der Systemstörung $r(k)$ bzw. dem gefilterten Signal $e(k)$ unkorreliert ist und weiterhin eine ständige Anregung des Prozesses der Ordnung n ermöglicht.

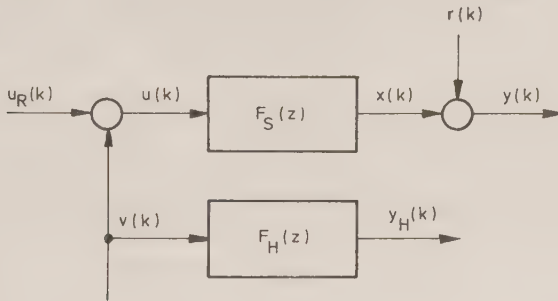


Bild 4.3: Hilfsmodell im geschlossenen Kreis

Im geschlossenen Kreis verlangt die IVA-Methode nicht nur Hilfsvariablen $y_H(k)$ für die Ausgangssignalfolge $\{y(k)\}$, sondern ebenso Hilfsvariablen $u_H(k)$ für die korrelierten Eingangssignale $u(k)$. Erfüllt das Zusatzsignal $v(k)$ die obengenannten Bedingungen, dann ist $v(k)$ eine konsistente Hilfsvariable für $u(k)$, da $v(k)$ zwar mit dem Nutzanteil, nicht aber mit dem Störanteil von $u(k)$ korreliert ist. Gemäß Bild 4.3 lassen sich mit $v(k)$ und der Hilfsmodell-Übertragungsfunktion $F_H(z)$ auch konsistente Hilfsvariablen $y_H(k)$ gewinnen, so daß mit $\underline{w} = \{y_H(k), v(k)\}$ die Bedingungen (3.2.2)

und (3.2.3) für die Konvergenz der IVA-Verfahren erfüllbar sind.

Bei der Bestimmung des Hilfsmodells und in den Hilfwertausdrücken $\underline{w}^T$, $\underline{w}^T(k+1)$ sind dann lediglich die Werte $u(k-i)$ durch die entsprechenden Terme $v(k-i)$ zu ersetzen. Mit dieser leichten Modifikation erhält man biasfreie, konsistente Schätzungen der Streckenparameter p in direkter Form. Ist $v(k)$ ein zusätzliches, meßbares Nutzsignal, dann wird zur Bestimmung von $\hat{p}$ die Kenntnis der Regler-Übertragungsfunktionen $F_R(z)$ nicht benötigt, da die Identifizierung völlig der im offenen Kreis entspricht. Ist $v(k)$ dagegen ein nichtmeßbares, stochastisches Signal, dann ist nach Gl. (4.3.4) die Kenntnis von $F_R(z)$ unbedingt erforderlich, um $u_R(k)$ berechnen zu können.

Damit ergeben sich auch im geschlossenen Regelkreis keine besondere Schwierigkeiten der IVA-Verfahren, da die Streckenparameter direkt und quasi ohne Mehraufwand erhältlich sind, wenn man von dem notwendigen Zusatzsignal $v(k)$ einmal absieht.

4.4 Identifizierung von Mehrgrößensystemen /58/-/61/

Die Vorteile des IVA-IPR-Verfahrens treten besonders deutlich bei der Erweiterung der Grundstruktur auf den Mehrgrößenfall hervor, da der numerische Aufwand insbesondere mit wachsender Zahl von Ausgangsgrößen erheblich ansteigt.

Bei 1 Eingangs- und m Ausgangsgrößen gilt entsprechend Gl. (2.2.4) folgende Modellgleichung:

$$\underline{A}(z^{-1}) \underline{Y}(z) = \underline{B}(z^{-1}) \underline{U}(z) + \underline{E}(z) \quad (4.4.1)$$

und $\underline{E}(z) = \underline{A}(z^{-1}) \underline{R}(z) . \quad (4.4.2)$

Dabei ist:

$$\underline{Y}(z) = [Y_1(z), Y_2(z), \dots, Y_m(z)]^T \quad (4.4.3)$$

$$\underline{U}(z) = [U_1(z), U_2(z), \dots, U_l(z)]^T \quad (4.4.4)$$

$$\underline{A}(z^{-1})_{[m \times m]} = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 z^{-1} + \dots + \underline{A}_n z^{-n} \quad (4.4.5)$$

$$\underline{B}(z^{-1})_{[m \times l]} = \underline{B}_1 z^{-1} + \dots + \underline{B}_n z^{-n} \quad (4.4.6)$$

Die Matrizen $\underline{A}(z^{-1})$, $\underline{B}(z^{-1})$ sind Matrix-Polynome, wobei vereinfachend angenommen wird, daß die $l \times m$ Übertragungsfunktionen $G_{ij}(z) = Y_j(z)/U_i(z)$ alle von der Ordnung n seien. Da die Elemente $\{a_{ij}\}$ von $\underline{A}(z^{-1})$ und $\{b_{ij}\}$ von $\underline{B}(z^{-1})$ selbst Polynome in z^{-1} sind, wird hinsichtlich der Stabilität vorausgesetzt, daß sämtliche Nullstellen der Elemente $\{a_{ij}, b_{ij}\}$ innerhalb des EK der z -Ebene liegen. Ebenso müssen auch die Nullstellen der Determinanten von $\underline{A}(z)$ und $\underline{B}(z)$ innerhalb des EK liegen. Bezüglich der einzelnen Eingangsgrößen $U_i(z)$ von $\underline{U}(z)$ gilt die PE(n)-Bedingung nach Gl. (3.2.9) und Gl. (3.2.10), und weiterhin wird statistische Unabhängigkeit zwischen $\underline{U}(z)$ und dem m -dimensionalen Rauschprozeß $\underline{R}(z)$ verlangt. Dann liefert die IVA-Methode konsistente Parameterschätzungen, wobei $\underline{R}(z)$ über ein beliebiges Filter aus dem weißen Rauschprozeß $\underline{w}(z)$ ableitbar ist:

$$\underline{R}(z) = \frac{\underline{F}(z^{-1})}{\underline{D}(z^{-1})} \underline{w}(z) \quad (4.4.7)$$

$$\text{mit} \quad E\{\underline{w}(k)\} = \underline{0}$$

$$E\{\underline{w}(k) \underline{w}^T(j)\} = \underline{Q}(k) \delta_{kj} \quad (4.4.8)$$

Die Kovarianzmatrix $\underline{Q}(k)$ hat Diagonalform.

Mit Gl. (4.4.7) und Gl. (4.4.2) folgt weiter:

$$\underline{E}(z) = \underline{A}(z^{-1}) \underline{R}(z) = \frac{\underline{C}(z^{-1})}{\underline{D}(z^{-1})} \underline{W}(z) \quad (4.4.9)$$

und $\underline{C}(z^{-1}) = \underline{A}(z^{-1}) \underline{F}(z^{-1}) . \quad (4.4.10)$

Damit ergibt sich eine allgemeine Systembeschreibung der IVA-Methode gemäß Bild 4.4:

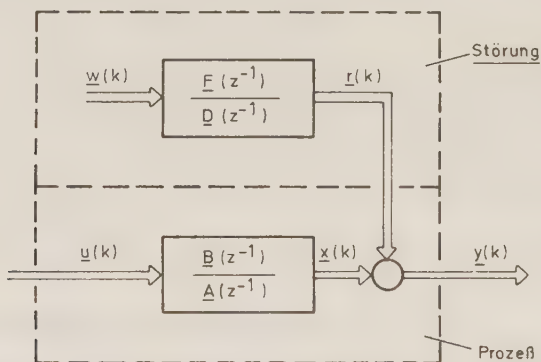


Bild 4.4: Allgemeine Systembeschreibung der IVA-Methode

Analog dem Eingrößenfall mit $a_0 = 1$ wollen wir die Diagonalelemente von $\underline{A}_0$ gleich 1 setzen. Mit der Definition:

$$\underline{A}_{-1} = [\underline{a}_{1,1}^T, \underline{a}_{2,1}^T, \dots, \underline{a}_{m,1}^T]^T = \{a_{jk,i}\} \quad (4.4.11)$$

$$\underline{B}_{-1} = [\underline{b}_{1,i}^T, \underline{b}_{2,i}^T, \dots, \underline{b}_{l,i}^T]^T = \{b_{jk,i}\} \quad (4.4.12)$$

$$\underline{a}_{k,i}^T = [a_{k1,i}, a_{k2,i}, \dots, a_{km,i}] [1 \times m] \quad (4.4.13)$$

$$\underline{b}_{k,i}^T = [b_{k1,i}, b_{k2,i}, \dots, b_{kl,i}] [1 \times m] \quad (4.4.14)$$

ist dann:

$$a_{jj,0} = 1 \quad j = 1, \dots, m \quad (4.4.15)$$

Um die Redundanz im allgemein definierten System (4.4.1) zu reduzieren, werden folgende kanonische Formen eingeführt, die sich durch geeignete Transformationen immer erreichen lassen:

Kanonische Form I : $\underline{A}_0 = \underline{I}$ (4.4.16)

Kanonische Form II : $\underline{A}_0 = \underline{I}$; $\underline{A} = \underline{L}$, $\underline{L}$ ist untere Dreiecksmatrix (4.4.17)

Kanonische Form III: $\underline{A}_0 = \underline{I}$; $\underline{F}(z^{-1})/\underline{D}(z^{-1}) = \underline{G}(z^{-1})$,
 $\underline{G}(z^{-1})$ ist Diagonalmatrix . (4.4.18)

Ausgangspunkt der weiteren Ausführungen ist die kanonische Form I, während Form III nur zu Vergleichszwecken dient. Dann ist mit $\underline{A}_0 = \underline{I}$:

$$(\underline{I} + \underline{A}_1 z^{-1} + \dots + \underline{A}_n z^{-n}) \underline{Y}(z) = (\underline{B}_1 z^{-1} + \dots + \underline{B}_n z^{-n}) \underline{U}(z) + \underline{E}(z). \quad (4.4.19)$$

Im Zeitbereich gilt entsprechend:

$$\underline{y}(t) = - \sum_{i=1}^n \underline{A}_i \underline{y}(t-i) + \sum_{i=1}^n \underline{B}_i \underline{u}(t-i) + \underline{e}(t) \quad (4.4.20)$$

Für das j-te Ausgangssignal ($j=1, 2, \dots, m$) ist

$$y_j(t) = - \sum_{i=1}^n \underline{a}_{j,i}^T \underline{y}(t-i) + \sum_{i=1}^n \underline{b}_{j,i}^T \underline{u}(t-i) + e_j(t) , \quad (4.4.21)$$

bzw. mit Gl. (4.4.13) und Gl. (4.4.14):

$$y_j(t) = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{jk,i} y_k(t-i) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^1 b_{jk,i} u_k(t-i) + e_j(t). \quad (4.4.22)$$

Führt man folgende Abkürzungen ein:

$$\underline{p}_j^T = \{ a_{jk,i} \mid b_{jk,i} \} = [\underline{a}_{j,1}^T, \dots, \underline{a}_{j,n}^T \mid \underline{b}_{j,1}^T, \dots, \underline{b}_{j,n}^T] \quad (4.4.23)$$

$$\begin{aligned} \underline{m}_j^T(t) &= \{ -y_k(t-i) \mid u_k(t-i) \} \\ &= [-\underline{y}^T(t-1), \dots, -\underline{y}^T(t-n) \mid \underline{u}^T(t-1), \dots, \underline{u}^T(t-n)] \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \underline{y}^T(t-j) &= [y_1(t-j), y_2(t-j), \dots, y_m(t-j)] \\ \underline{u}^T(t-j) &= [u_1(t-j), u_2(t-j), \dots, u_1(t-j)] , \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

dann wird aus Gl. (4.4.21):

$$\boxed{y_j(t) = \underline{m}_j^T(t) \underline{p}_j + e_j(t)} . \quad (4.4.26)$$

Für $j=1,2,\dots,m$ gilt dann entsprechend Gl. (4.4.20):

$$\underline{y}(t) = \underline{M}(t) \underline{p} + \underline{e}(t) \quad (4.4.27)$$

$$\text{mit} \quad \underline{p}^T = [\underline{p}_1^T, \underline{p}_2^T, \dots, \underline{p}_m^T]_{[1 \times mn(m+1)]} \quad (4.4.28)$$

$$\underline{M}(t) = \begin{bmatrix} \underline{m}_1^T(t) & & & \\ & \underline{m}_2^T(t) & & \\ & & \underline{0} & \\ \underline{0} & & & \underline{m}_m^T(t) \end{bmatrix} \quad (4.4.29)$$

[m \times m \cdot n(m+1)]

In dieser kanonischen Form I sind mit der Hilfsvariablenmethode

$$q = m \cdot n(m+1) = m^2 n + m \ln \quad (4.4.30)$$

Parameter zu bestimmen. Da aber die IVA-Theorie nicht von einem Modell der Störungen ausgeht, wird auch die Korrelation zwischen den einzelnen Störungen nicht miterfaßt. Damit ist das Schätzproblem zur Bestimmung von $m \cdot n(m+1)$ Parametern aufspaltbar in m Teilprobleme mit jeweils nur $q_j = n(m+1)$ Parametern, wodurch die benötigte Zahl arithmetischer Operationen erheblich herabgesetzt werden kann. Diese bei der IVA-Methode prinzipiell mögliche Aufspaltung in m Teilprobleme der Form (4.4.26) ist bei den auf der Bestimmung eines Störmodells beruhenden verbesserten Verfahren, wie die Maximum-Likelihood (ML)- oder verallgemeinerte Least-squares-Methode (GLS), nur dann möglich, wenn die Systembeschreibung in der kanonischen Form III vorliegt. Dies ist i.a. jedoch ein sehr spezieller Fall.

Zur vollständigen Beschreibung der IVA-Methode im Mehrgrößensystem ist noch die Definition des Hilfswertvektors $\underline{w}_j^T(t)$ nötig. Bezüglich des Verzögerungsmodells gilt entsprechend Gl. (3.2.4):

$$y_{Hj}(t) = \underline{w}_j^T(t) \hat{p}_{Hj} \quad (4.4.31)$$

$$\hat{p}_{Hj}(t) = (1-\delta)\hat{p}_{Hj}(t-1) + \hat{p}_j(t-v) \quad (4.4.32)$$

$$\text{mit } \underline{y}_j^T(t) = [-\underline{y}_H^T(t-1), \dots, -\underline{y}_H^T(t-n) : \underline{u}^T(t-1), \dots, \underline{u}^T(t-n)] \quad (4.4.33)$$

$$\text{und } \underline{y}_H^T(t-j) = [y_{H1}(t-j), y_{H2}(t-j), \dots, y_{Hm}(t-j)] \quad (4.4.34)$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

	Kanonische Form I		Kanonische Form II	
	Allg.	$l=m=n=2$	Allg.	$l=m=n=2$
IVA	$m \cdot n(m+1)$	16	$m \cdot n(\frac{m+1}{2} + 1)$	14
GLS	$m \cdot n(2m+1)$	24	$m \cdot n(\frac{3m+1}{2} + 1)$	22

Tabelle 4.1: Anzahl q von Parametern im Mehrgrößenfall

Arithm. Operationen	IVA-IPR/I	GLS-REK/I	GLS-REK/III
Multiplikationen	704	15.648	4.416
Additionen	392	15.000	4.056
Speicherplätze	354	1.272	696

Tabelle 4.2: Numerischer Aufwand bei $l=m=n=2$

Um einen Einblick in die Größenordnung des erforderlichen numerischen Aufwandes zu gewinnen, wurde das IVA-IPR-Verfahren dem rekursiven GLS-Verfahren

gegenübergestellt und die Ergebnisse, die sich direkt aus Tabelle 3.3 gewinnen lassen, in den Tabellen 4.1 und 4.2 aufgelistet. Es wurde ein System 2.Ordnung zugrundegelegt mit 2 Eingangs- und 2 Ausgangsgrößen, dessen Struktur im Bild 4.5 skizziert ist. In der kanonischen Form I sind dann 16 Parameter mit Hilfe der IVA-Methode zu bestimmen, während mit dem GLS-Verfahren infolge des Störmodellansatzes 24 Parameter geschätzt werden müssen. Durch die Aufspaltung in 2 Teilsysteme werden dann nur jeweils 8 Parameter über das IVA-IPR-Verfahren berechnet, wozu insgesamt 704 Multiplikationen nötig sind (ohne das Hilfsmodell). Um konsistente Systemparameter auch über die rekursive GLS-Methode zu erhalten, ist mehr als der 20fache Aufwand nötig, sofern Stör- und Systemparameter gleichermaßen behandelt werden. In der kanonischen Form III reduziert sich dieser Mehraufwand auf etwa das 6fache des IVA-IPR-Aufwandes, dennoch ist der Abstand beträchtlich.

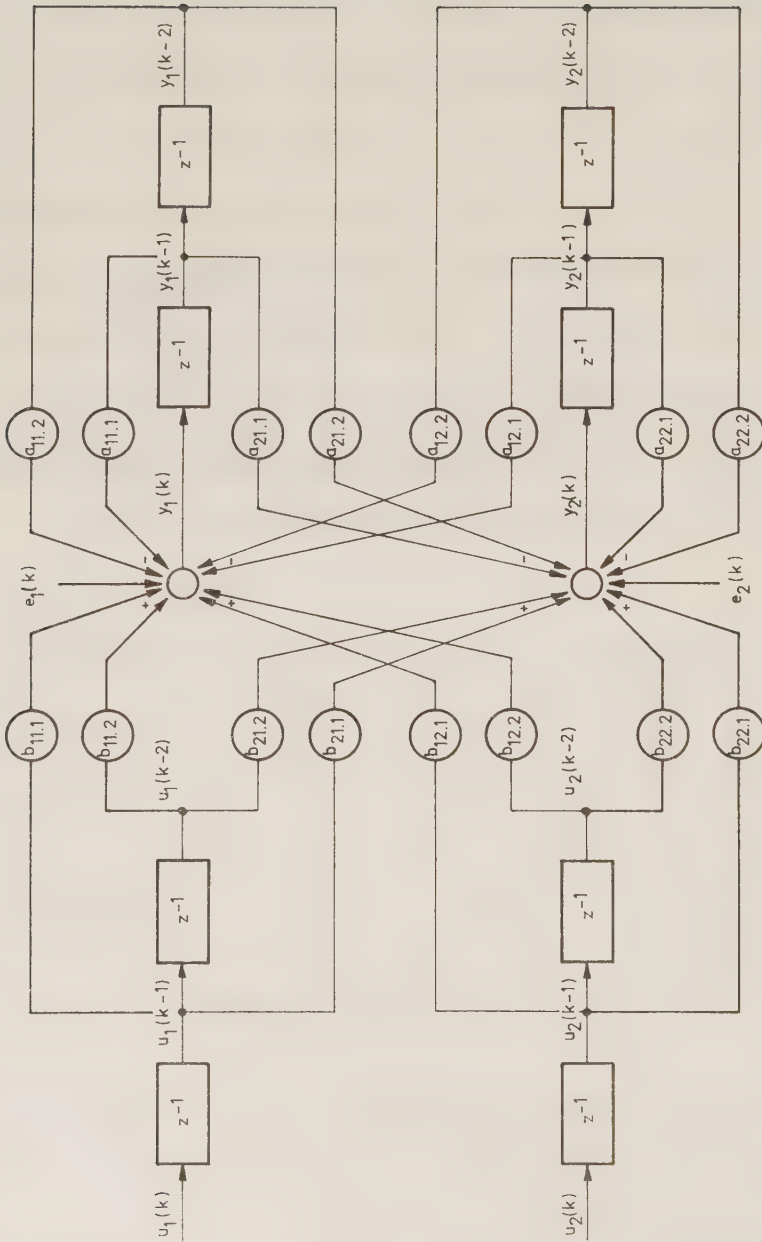


Bild 4.5: Struktur des Mehrgrößensystems bei $l = m = n = 2$

5. Simulationsergebnisse

Zum Test des in Kapitel 3.1.1 beschriebenen indirekt-pseudorekursiven Hilfsvariablenverfahrens (IVA-IPR) wurden 3 lineare, zeitinvariante Regelstrecken herangezogen, die durch die folgende allgemeine Struktur darstellbar sind (Bild 5.1.1):

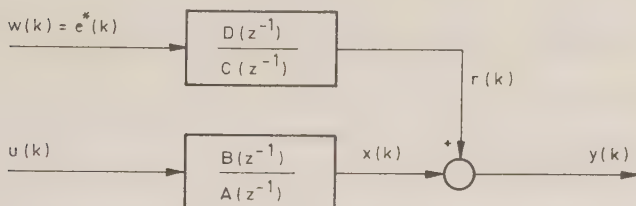


Bild 5.1.1: Struktur der Teststrecken

Die Nachbildung dieser Testprozesse erfolgte ebenso wie der Verfahrenstest an der digitalen Großrechenanlage Telefunken TR 440. Um einen Vergleich zu ermöglichen, wurden im wesentlichen die in /10/, /13/ und /14/ vorgeschlagenen Testbedingungen übernommen. Die Simulation hat zunächst die Integration des indirekten pseudorekursiven IVA-Verfahrens in ein Gesamtkonzept zur Struktur- und Kennwertermittlung linearer, dynamischer Eingrößensysteme zum Ziel. Sie erstreckt sich auf die Bestimmung der Modellordnung, den Konditionstest und auf die vergleichende Bestimmung der Streckenparameter. In erweiterter Form schließlich auch auf die Identifizierung im geschlossenen Regelkreis und auf die Kennwertermittlung von Mehrgrößensystemen.

5.1 Simulationsprozesse

Mit Prozeß I wird ein schwingungsfähiges System 2.Ordnung bezeichnet, das folgende diskrete Übertragungsfunktion $G_1(z)$ besitzt:

$$G_1(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1.0 z^{-1} + 0.5 z^{-2}}{1 - 1.5 z^{-1} + 0.7 z^{-2}} \quad (5.1.1)$$

Dieser in der Literatur sehr häufig angeführte (Äström-)Prozeß ist lediglich im z -Bereich definiert, also ohne direkten Bezug zu einem kontinuierlichen Prozeß. Diesem diskreten Prozeß sei eine Abtastzeit von $T_0 = 2 \text{ sec}$ zugeordnet. Dann ergibt sich eine Pol-, Nullstellenverteilung in der z -Ebene nach Bild 5.1.2 und eine Übergangsfunktion dieser Strecke gemäß Bild 5.1.3, definiert in den Abtastzeitpunkten $t = k \cdot T_0$.

Prozeß II sei ein System 2.Ordnung mit Allpaßverhalten. Die kontinuierliche Übertragungsfunktion $G_2(s)$ ist:

$$G_2(s) = \frac{0,025 - 0,1s}{0,025 + 0,355s + s^2} = -0,1 \frac{s - 0,25}{(s + 0,25)(s + 0,1)} \quad (5.1.2)$$

Unter Berücksichtigung eines Haltegliedes 0-ter Ordnung führt die z -Transformation von Gl. (5.1.2) bei einer Abtastzeit von $T_0 = 2 \text{ sec}$ zu der äquivalenten z -Übertragungsfunktion $G_2(z)$:

$$G_2(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{-0,102 z^{-1} + 0,173 z^{-2}}{1 - 1,425 z^{-1} + 0,496 z^{-2}} \quad (5.1.3)$$

oder auch:

$$G_2(z) = -0,102 \frac{z - 1,696}{z^2 - 1,425 z + 0,496} = -0,102 \frac{z - 1,696}{(z - 0,607)(z - 0,818)} \quad (5.1.4)$$

Prozeß I

$$G_1(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1,0 z^{-1} + 0,5 z^{-2}}{1 - 1,5 z^{-1} + 0,7 z^{-2}}$$

$$z_{0,1} = -0,5$$

$$z_{p,1,2} = 0,75 \pm j0,37$$

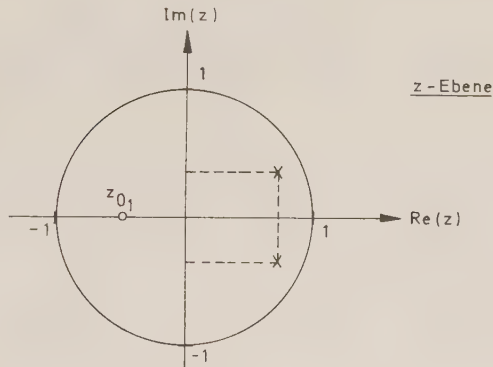


Bild 5.1.2: Pol- Nullstellenverteilung in der z-Ebene

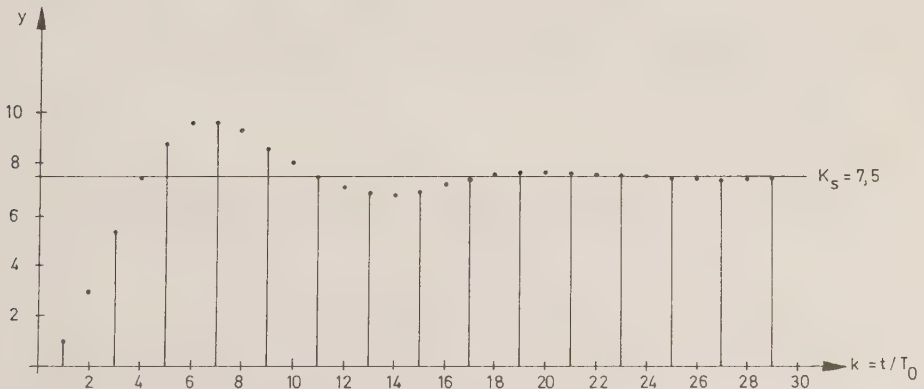


Bild 5.1.3: Übergangsfunktion von Prozeß I ($T_0 = 2$ sec)

Die Verteilung der Pole und Nullstellen in der s - und z -Ebene sowie die zugehörige Übergangsfunktion sind in den Bildern 5.1.4 und 5.1.5 dargestellt.

Prozeß III, ein sprungfähiges, aperiodisches System 2.Ordnung, mit der kontinuierlichen Übertragungsfunktion:

$$G_3(s) = \frac{1 + 0,2 s + 0,01 \frac{s^2}{2}}{1 + 4,5 s + 1,0 \frac{s^2}{2}} = \frac{(s + 10)^2}{(s + 4,2656)(s + 0,2344)} \quad (5.1.5)$$

zeichnet sich durch einen Pol in der Nähe der Stabilitätsgrenze aus (Bild 5.1.6) /13/. Zum Erfassen der schnellen Eigenbewegung dieses Prozesses ist dem Shannon'scher Abtasttheorem entsprechend eine Abtastzeit von etwa $T_0 = 0,1$ sec nötig. Mit $T_0 = 0,1$ sec ergibt die z -Transformation von Gl. (5.1.5) bei Berücksichtigung eines Abtasters o -ter Ordnung gemäß /4/:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (5.1.6)$$

folgende z -Übertragungsfunktion:

$$G_3(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{0,01 + 0,0004 z^{-1} - 0,0024 z^{-2}}{1,0 - 1,6296 z^{-1} + 0,6376 z^{-2}} \quad (5.1.7)$$

oder auch (Bild 5.1.6):

$$G_3(z) = 0,01 \frac{z^2 + 0,04 z - 0,24}{z^2 - 1,6296 z + 0,6376} = 0,01 \frac{(z + 0,5103)(z - 0,4703)}{(z - 0,977)(z - 0,6526)} \quad (5.1.8)$$

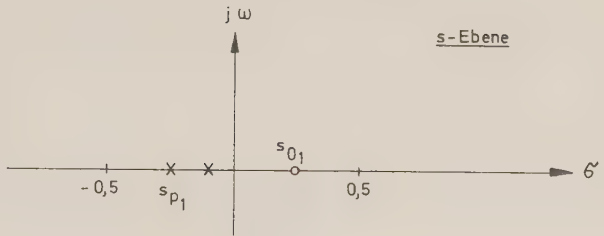
Die zugehörige Übergangsfunktion zeigt Bild 5.7.

Prozeß II

$$s_{01} = 0,25$$

$$s_{p1} = -0,25$$

$$s_{p2} = -0,1$$



$$z_{01} = 1,696$$

$$z_{p1} = 0,607$$

$$z_{p2} = 0,818$$

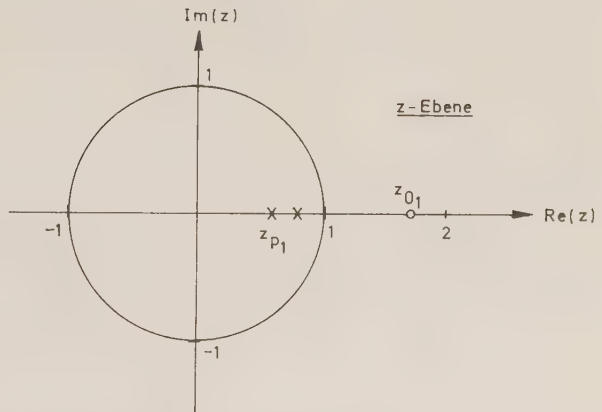


Bild 5.1.4: Pol- Nullstellenverteilung von Prozeß II ($T_0 = 2 \text{ sec}$)

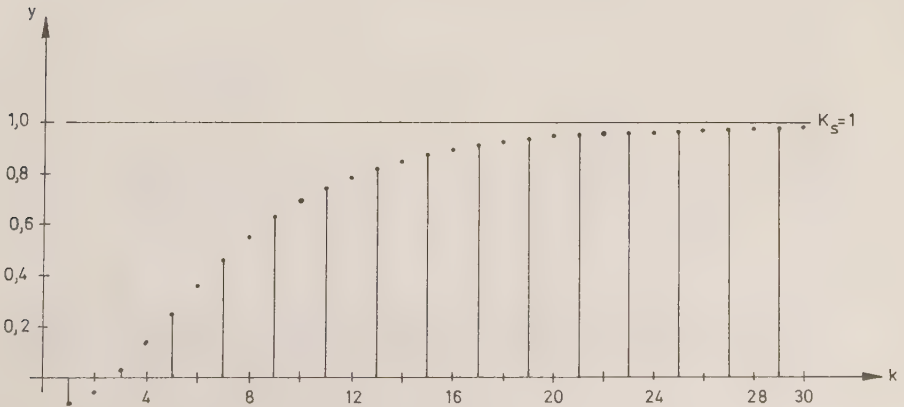


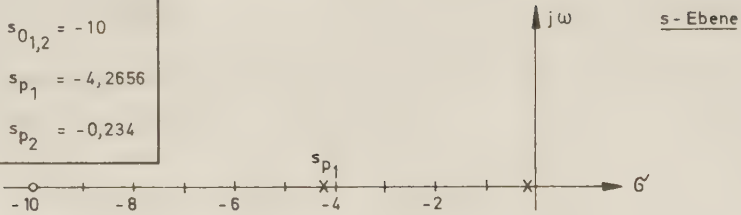
Bild 5.1.5: Übergangsfunktion von Prozeß II ($T_0 = 2 \text{ sec}$)

Prozeß III

$$s_{01,2} = -10$$

$$s_{p1} = -4,2656$$

$$s_{p2} = -0,234$$



$$z_{01} = -0,5103$$

$$z_{02} = 0,4703$$

$$z_{p1} = 0,6526$$

$$z_{p2} = 0,977$$

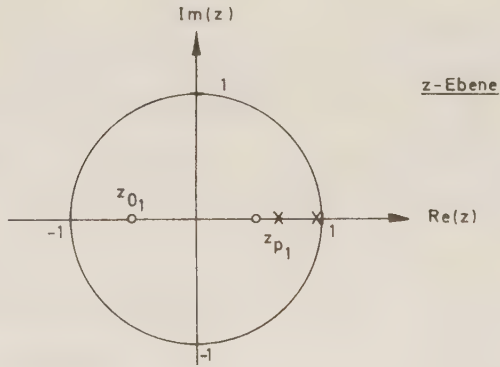


Bild 5.1.6: Pol- Nullstellenverteilung von Prozeß III ($T_0 = 0.1$ sec)

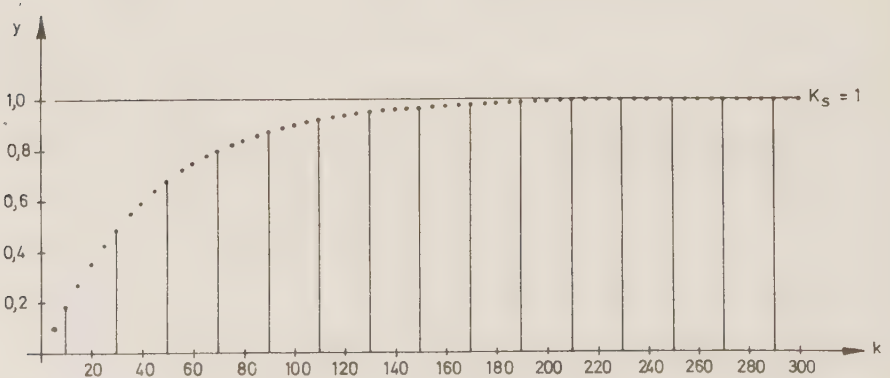


Bild 5.1.7: Übergangsfunktion von Prozeß III ($T_0 = 0.1$ sec)

5.2 Testbedingungen

Bei der Festlegung der Betriebs- oder Testbedingungen seien Eingangssignale, Störsignale und Bewertungskriterien gewählt, die den Vergleich zu den Ergebnissen anderer Verfahren ermöglichen /14/.

Als Eingangssignal $u(k)$ wird ein diskretes, pseudostochastisches, binäres Rauschsignal (PRBS) mit der Periode 63 gewählt, das sich leicht über ein rückgekoppeltes Schieberegister erzeugen läßt. Die Taktzeit ΔT dieses Eingangssignals entspricht bei den Prozessen I und II gerade der Abtastzeit T_0 , während für Prozeß III $\Delta T = 10 T_0$ gewählt wird.

Als Störsignal $r(k)$ wird gemäß Bild 5.1.1 ein autokorreliertes Signal angenommen, das sich durch Filterung aus diskretem $\{0,1\}$ -normalverteiltem weißem Rauschen $w(k)$ ergibt. Die diskrete Störübertragungsfunktion $G_r(z)$ sei dabei aus folgendem kontinuierlichen Verzögerungsglied 2.Ordnung entstanden:

$$G_r(s) = \frac{0,1 K_r}{1 + 6 s + 9 s^2} = \frac{0,1 K_r}{(1 + 3 s)^2} \quad (5.2.1)$$

Unterwirft man $G_r(s)$ der z-Transformation (ohne Halteglied), dann ergibt sich:

a) bei $T_0 = 2 \text{ sec}$

$$G_r(z) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{d_1 z^{-1}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}} = \frac{0,0114 K_r z^{-1}}{1 - 1,0268 z^{-1} + 0,2636 z^{-2}} \quad (5.2.2)$$

b) bei $T_0 = 0,1 \text{ sec}$

$$G_r(z) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{d_1 z^{-1}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}} = \frac{0,001075 K_r z^{-1}}{1 - 1,9344 z^{-1} + 0,9355 z^{-2}} \quad (5.2.3)$$

Die Konstante K_r ist dem jeweiligen Störpegel anzupassen.

Der Störpegel λ wird als Verhältnis der Standardabweichungen von Störsignal r und Prozeßausgangssignal y definiert:

$$\lambda = \sigma_r / \sigma_y \quad (5.2.4)$$

Unter der Voraussetzung, daß sich die Anregungssignale $w(k)$ und $u(k)$ wie weißes Rauschen mit verschwindendem Mittelwert verhalten, entspricht der quadratische Mittelwert der Ausgangssignale von Störfilter G_r und jeweiligem Prozeß G_i auch deren Varianz, und es gilt:

$$\sigma_r^2 = \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_{EK} G_r(z) G_r(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (5.2.5)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_u^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_{EK} G_i(z) G_i(z^{-1}) \frac{dz}{z} . \quad (5.2.6)$$

Die Streuungen σ_r und σ_y sind dannach durch eine komplexe Integration am Einheitskreis bestimmbar, darüber hinaus kann die Streuung σ_y auch aus der diskreten Wertefolge $x(k)$ des ungestörten Simulationsprozesses gemäß

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (5.2.7)$$

bestimmt werden, wobei $\overline{x^2}$ den quadratischen Mittelwert und $\bar{x}$ den linearen Mittelwert der Wertefolge $x(k)$ darstellt. Bei verschwindendem Mittelwert entspricht σ_y dem Effektivwert des ungestörten Ausgangssignals.

Das als Eingangssignal $u(k)$ gewählte PRBS-Signal mit den determinierten Amplituden ± 1 kann zwar nur näherungsweise als weißes Rauschen betrachtet werden, doch ist der Fehler bei der gewählten Periode von 63 sehr klein, wie sich aus der entsprechenden Autokorrelationsfunktion ablesen läßt /50/.

Die Auswertung des Integrals, Gl. (5.2.5) führt auf folgende Werte:

$$\text{Für } T_0 = 2 \text{ sec} : \sigma_r(K_r=1) = 0,0203 \quad (5.2.8)$$

$$T_0 = 0,1 \text{ sec} : \sigma_r(K_r=1) = 0,0913 .$$

Bezeichnen wir die Zählerkonstante der diskreten Störübertragungsfunktionen, Gl. (5.2.2) und Gl. (5.2.3) mit K_{st} , so daß gilt:

$$T_0 = 2 \text{ sec} : K_{st} = 0,0114 K_r \quad (5.2.9)$$

$$T_0 = 0,1 \text{ sec} : K_{st} = 0,001075 K_r ,$$

dann ergeben sich mit

$$K_r = \lambda \sigma_y / \sigma_r \quad (5.2.10)$$

die in Tabelle 5.2.1 angegebenen Werte für die Konstante K_{st} des Störfilters, wenn σ_y die ebenfalls eingetragenen Werte annimmt.

λ	Prozeß I	Prozeß II	Prozeß III	
0.2	0.48	0.032	0.0005	K_{st}
0.5	1.20	0.08	0.0013	
1.0	2.40	0.16	0.0026	
0	4.247	0.2752	0.2224	σ_y
	$T_0 = \Delta T = 2 \text{ sec}$	$T_0 = \Delta T = 2 \text{ sec}$	$T_0 = 0.1 \text{ s}, \Delta T = 1 \text{ s}$	

Tabelle 5.2.1: Konstanten σ_y und K_{st} für das Störfilter

Entsprechend der Aufteilung des Schätzproblems in ein statistisches und numerisches Teilproblem ziehen wir Bewertungskriterien heran, die die Konsistenz bzw. Eindeutigkeit der Schätzung zu bewerten und zu vergleichen erlauben. Als ein Maß für die Konsistenz wollen wir die aus Schätzwerten bestimmte Übergangsfunktion betrachten, die in erheblichem Maße durch den geschätzten Verstärkungsfaktor $\hat{K}$ beeinflusst wird:

$$\hat{K} = \sum_{i=1}^n \hat{b}_i / (1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i) = \hat{K}_z / \hat{K}_N . \quad (5.2.11)$$

Die exakten Werte des Zähler- und Nennerausdrucks zur Bestimmung von K sind für die 3 Prozesse von beträchtlichem Größenunterschied, wie Tabelle 5.2.2 zeigt. Dabei ist $K = K_z / K_N$

	Prozeß I	Prozeß II	Prozeß III
K	7.5	1.0	1.0
K_z	1.5	0.071	0.008
K_N	0.2	0.071	0.008

Tabelle 5.2.2: Größenordnung von Zähler und Nenner des Verstärkungsfaktors K

Die Eindeutigkeit der Schätzung ist dagegen aus dem Zeitverlauf $\hat{p}(k)$ der berechneten Parameter erkennbar, wobei $\hat{p}(k)$ darüber hinaus auch eine Aussage über die Konsistenz der Schätzung zuläßt. Es ist allerdings zu beachten, daß Konsistenz eine asymptotische Eigenschaft für unendlich großes Beobachtungsintervall ist.

5.3 Bestimmung der Modellordnung

Entsprechend den Ausführungen im Kapitel 4.1 verwenden wir zur Vorabbestimmung der günstigsten Modellordnung die Verlustfunktion:

$$V(n) = \frac{1}{N} \|e(n)\|^2 \quad (5.3.1)$$

und weiterhin das Determinantenverhältnis:

$$DV(n) = D(n+1)/D(n) \quad (5.3.2)$$

mit $D(n) = \det(\underline{Z}^*)$. (5.3.3)

Da beide Größen sehr einfach mit Hilfe des LS-DPR-Verfahrens bestimmt werden, ist deren Berechnung für alle Ordnungen bis maximal $\hat{n}$ ($\hat{n}=5$) mit nur einer Meßreihe möglich, ohne die Parameter selbst bestimmen zu müssen. Wir gehen dabei von mittleren Verhältnissen aus, d.h. von einem Meßintervall mit $N=500$ Werten und 50 % Störpegel ($\lambda = 0.5$). Nach Bild 5.3.1 läßt sich sowohl aus $V(n)$ als auch aus $DV(n)$ bei allen 3 Prozessen die richtige Systemmodellordnung $n=2$ entnehmen.

5.4 Konditionstest

Zur Abschätzung der numerischen Bedingungen, die sich aus der Wahl einer bestimmten Modellordnung ergeben, ziehen wir die Minimalkonditionszahl $K_M(n)$ der orthogonal transformierten Dreiecksmatrix $\underline{Z}^*$ des LS-DPR-Verfahrens gemäß Gl. 4.2.1 heran:

$$K_M(n) = K_M(\underline{Z}^*) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, 5 \quad (5.4.1)$$

$$K_M(\underline{Z}^*) = \max_{1 \leq i, k \leq q} \frac{z_{ii}^*}{z_{kk}^*} \leq \text{cond}(\underline{Z}^*) \quad (5.4.2)$$

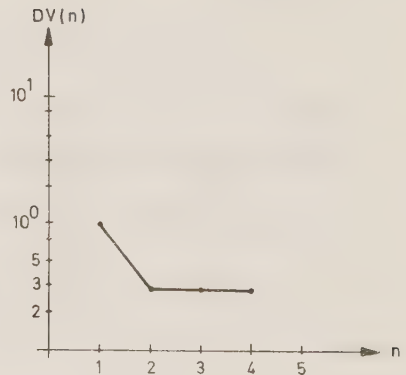
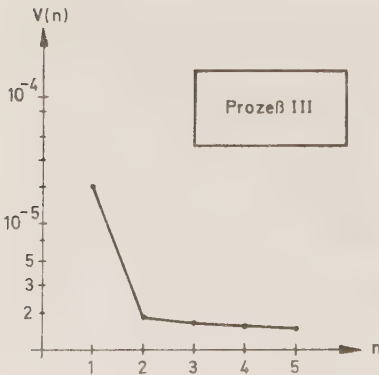
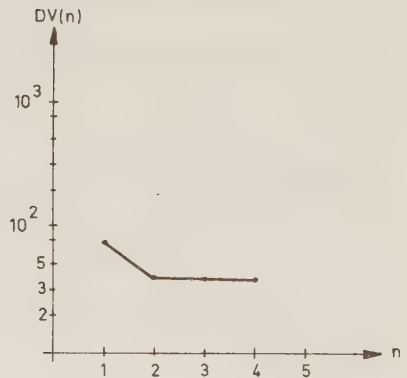
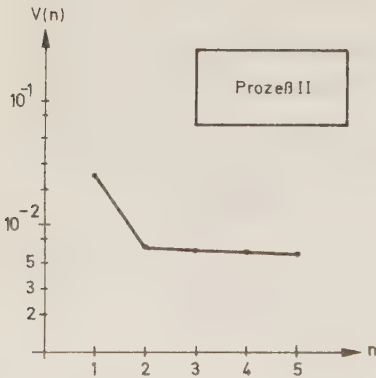
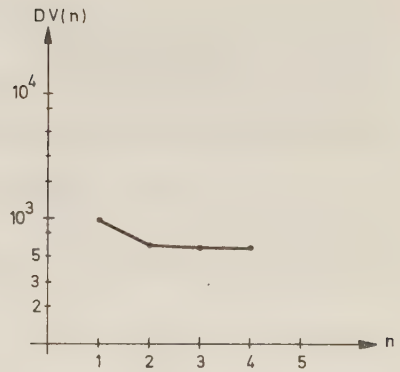
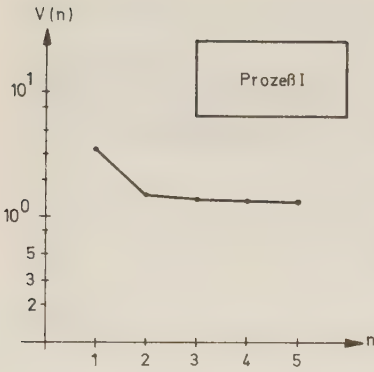


Bild 5.3.1: Strukturprüfungen bei $N=500$, $\lambda=0.5$

Es sei ebenfalls: $N = 500, \lambda = 0.5$.

Aus Bild 5.4.1 wird deutlich, daß die Kennwertermittlung bei den Prozessen I und II gut konditioniert ist, während die Minimalkondition bei Prozeß III erheblich größer ist und sich der kritischen Grenze von 10^3 nähert. Prozeß III stellt demnach bei $T_0 = 0.1$ sec und $n = 2$ ein schlecht konditioniertes System dar, wie es aufgrund der vorgegebenen Pol-Nullstellenverteilung in der z-Ebene auch zu erwarten war. Durch Vergrößern der Abtastzeit kann diese Konditionszahl erheblich verbessert werden, wie es für $T_0 = 0.4$ sec im Bild 5.5.1 gestrichelt angedeutet ist. Aufgrund der Konditionsabschätzung ergeben sich Konsequenzen für die Wahl des Bewertungs- oder Konvergenzfaktors ρ des IVA-IPR-Verfahrens. Für die Prozesse I und II werden Schätzergebnisse zu erwarten sein, die weitgehend unabhängig von der Größe des Faktors ρ im Bereich

$$1/\sqrt{q} = 0.5 \leq \rho \leq 0.9$$

sind. Weiterhin wird man für beide Prozesse auch das IVA-UVEX-Verfahren einsetzen können. Bei dem schlecht konditionierten Prozeß III muß dagegen mit einer deutlichen Abhängigkeit der Konvergenz des IPR-Verfahrens von der Wahl des Faktors ρ gerechnet werden. Es ist daher zweckmäßig, auf den unteren Grenzfall mit $\rho = 1/\sqrt{q} = 0.447$ zurückzugreifen.

5.5 Ermittlung der Prozeßkennwerte

Die Kennwertermittlung der 3 simulierten Prozesse (offener Kreis) wurde für 3 Störfälle mit $\lambda = 0.2, 0.5, 1.0$ durchgeführt und die Ergebnisse des indirekt-pseudorekursiven Hilfsvariablenverfahrens

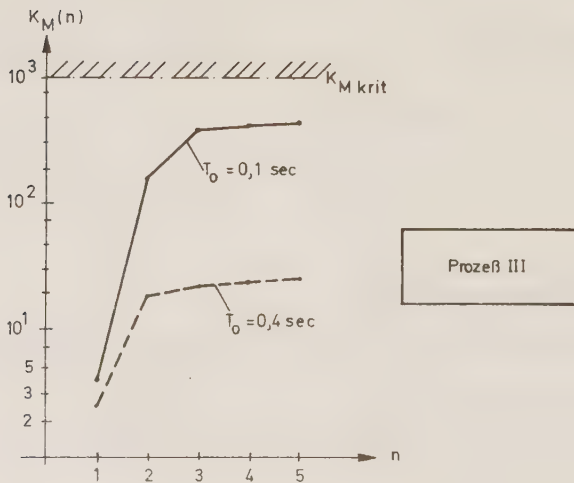
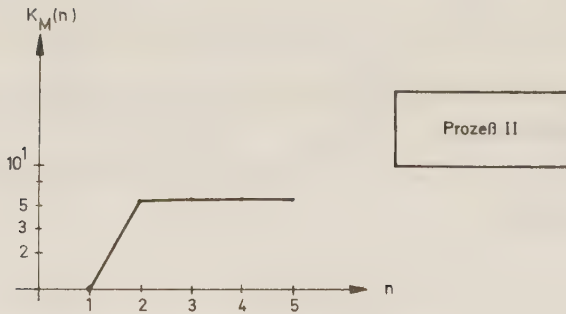
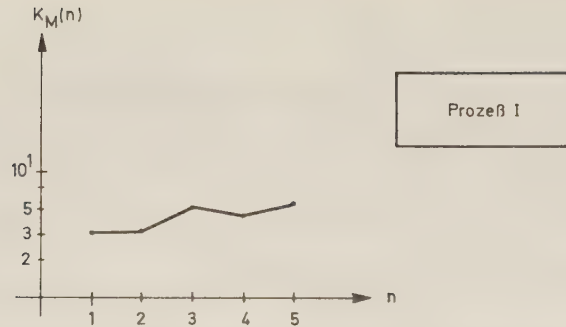


Bild 5.4.1: Konditionstest bei $N=500$, $\lambda=0.5$

(IVA-IPR) den Ergebnissen der direkt-pseudorekursiven Least-squares-Schätzung (LS-DPR), denen des Korrelationsverfahrens (KOR) und der universell expliziten Version der Hilfsvariablenmethode (IVA-UVEX) gegenübergestellt. Das zeitliche Verhalten der Parameterschätzungen $\hat{p} = \hat{p}(t)$, d.h. die Abhängigkeit der einzelnen Kennwerte $\hat{p}_i$ vom Beobachtungsintervall, ist für den mittleren Störpegel von 50 % ($\lambda = 0.5$) in Form von Plotterzeichnungen im Anhang A.5 dargestellt. Betrachtet man $\hat{p}(t)$ zu einem festen Zeitpunkt, beispielsweise am Ende der hier gewählten Meßintervalle, dann läßt sich die Schätzung $\hat{p}$ diagrammförmig in Abhängigkeit vom Störpegel λ auftragen, wie dies in den Bildern 5.5.1 und 5.5.2 sichtbar wird. Man erkennt hieraus zunächst, daß bei fehlender Störung alle betrachteten Verfahren die unbekannten Parameter exakt bestimmen, wenn - wie hier vorausgesetzt - die Modellordnung mit der Systemordnung identisch ist. Mit wachsendem Störpegel liefert die LS-Schätzung einen immer größer werdenden systematischen Fehler (Bias) in den a- und b-Parametern, bei $\hat{p} = \{ \hat{a}_1, \hat{b}_1 \}$, und ebenso im Verstärkungsfaktor $\hat{K}$. Die statistisch verbesserten Verfahren KOR und IVA-IPR (mit Verzögerungs-Hilfsmodell) bauen diesen Parameterfehler bei allen Störverhältnissen ab, wobei auffällt, daß sich die Ergebnisse beider Verfahren nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Der durch die LS-Schätzung prinzipiell bedingte Fehler im Verstärkungsfaktor $\hat{K}$ wird bei Prozeß III durch KOR oder IVA-IPR dagegen nicht abgebaut. Die Ursache ist darin zu suchen, daß $\hat{K}$ bei Prozeß III durch die sehr kleinen b-Parameter bestimmt wird, wie aus Tabelle 5.2.2 hervorgeht. Absolut kleine numerische Schwankungen haben dann relativ große Fehler in $\hat{K}$ zur Folge. Andererseits können am Ende des Meßintervalls lediglich quasistationäre Verhältnisse in $\hat{p}(t)$ erwartet werden, im Gegensatz zur statistischen Aussage

der Konsistenz, die stationäre Verhältnisse bei unendlich großem Meßintervall voraussetzt.

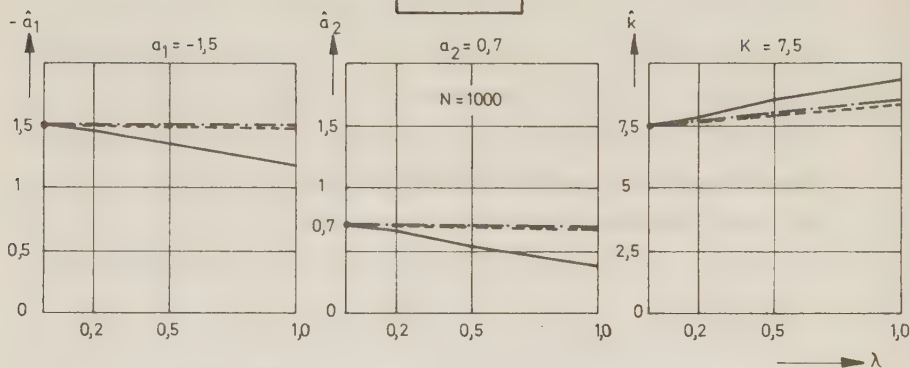
Die Ergebnisse des IVA-UVEX-Verfahrens sind für Prozeß I und Prozeß II identisch mit denen der IVA-IPR-Methode. Für den schlecht konditionierten Prozeß III konnte das IVA-UVEX-Verfahren dagegen bei keinem Störfall und mit keinem Hilfsmodell eine stabile Schätzung $\hat{p}(t)$ liefern, den Fall $\lambda = 0$ eingeschlossen.

Mit diesen Schätzergebnissen $\hat{p}$ am Ende des Beobachtungsintervalls lassen sich sofort die geschätzten Übergangsfunktionen für die einzelnen Prozesse bei verschiedenen Störpegeln berechnen, wie dies in den Bildern 5.5.3 - 5.5.5 dargestellt ist. Man erkennt insbesondere aus den Ergebnissen von Prozeß I, daß bei dem gewählten Meßintervall die statistisch verbesserten Verfahren KOR und IVA-IPR zwar auch einen gewissen stationären und störungsabhängigen Fehler liefern, die Prozeßdynamik aber sehr genau bestimmen, wie aus dem Vergleich mit dem exakten Verlauf von Bild 5.1.3 deutlich wird.

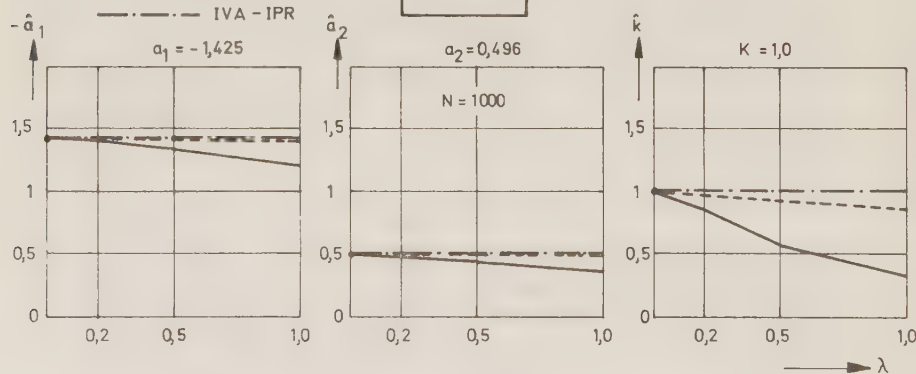
Betrachten wir das zeitliche Verhalten $\hat{p}(t)$ der einzelnen Schätzungen, aufgelistet im Anhang A5 für 50 % Störpegel, dann wird zunächst deutlich, daß die statistische Verbesserung der KOR- oder IVA-Methoden erst bei größeren Meßintervallen zum Tragen kommt. Andererseits tritt der Bias der LS-Schätzung im wesentlichen in den autoregressiven a-Parametern auf, wie es vom Ansatz her zu erwarten ist (Bilder A.5.1, A.5.7, A.5.11). Auffallend ist die - abgesehen vom Anfangsintervall - weitgehende Übereinstimmung von $\hat{p}(t)$ des KOR- und IVA-UVEX-Verfahrens bei den gutkonditionierten Prozessen I und II, während die Ergebnisse von IVA-UVEX- und IVA-IPR-Verfahren bei einem Konvergenzfaktor von $\rho = 0.9$ nahezu deckungsgleich sind, bei Verwendung des einfachen verzögernd wirkenden Hilfsmodells (Bilder A.5.3, A.5.4 und A.5.9, A.5.10).

Ohne Gewichtung ($\rho = 1$) wird aus Bild A.5.5 das verzögerte, geglättete Einschwingverhalten der IVA-IPR-Strategie sichtbar, andererseits zeigt Bild A.5.6 die geringe Rauschempfindlichkeit der Schätzung gegenüber sehr klein gewähltem Gewichtungsfaktor $\rho = 1/q = 0.2$. Bei dem schlecht konditionierten Prozeß III, für den wegen der betragsmäßig sehr kleinen b-Parameter lediglich die a-Parameter aus $\hat{\underline{p}} = \{\hat{a}_1, \hat{b}_1\}$ aufgezeichnet wurden, schwankt $\hat{\underline{a}}(t)$ des IVA-IPR-Verfahrens ($\rho = \sqrt{1/q}$) stärker um den Mittelwert, als es beim KOR-Verfahren der Fall ist (Bilder A.5.12, A.5.13). Es empfiehlt sich daher, die Parameter etwas zu glätten, wozu bei der IVA-IPR-Methode eine Verzögerung 1.Ordnung mit einer Zeitkonstanten von $\tau = 20 T_0$ verwandt wurde. Vergleicht man bei diesem Verfahren die Ergebnisse, die über verschiedene Hilfsmodelle gewonnen wurden (Bilder A.5.13 - A.5.17), dann zeigen sich nur unwesentliche Unterschiede zum statistischen Idealfall mit dem unverrauschten Ausgangssignal $x(k)$ als Hilfsvariable $y_H(k)$ im Bild A.5.14. Dies gilt auch für ein festes, zeitinvariantes Hilfsmodell, dessen Parameter identisch sind mit den aus einer vorangegangenen LS-Schätzung gewonnenen Prozeßmodellparametern (Bild A.5.17). Schließlich zeigen die Bilder A.5.18 und A.5.19 die Bedeutung des Gewichtungsfaktors ρ für die Konvergenz des IVA-IPR-Verfahrens im schlecht konditionierten Falle. Bei $\rho = 0.9$ enthält der Mittelwert der Schätzung $\hat{\underline{a}}(t)$ offensichtlich noch einen Bias, wobei die Streuung um diesen Mittelwert sehr groß ist. Bei $\rho = \sqrt{1/q} = 0.447$ wird der Bias dagegen abgebaut, und auch die Varianz der Schätzung wird erheblich reduziert (Bild A.5.19, ohne Glättung).

Prozeß I



Prozeß II



Prozeß III

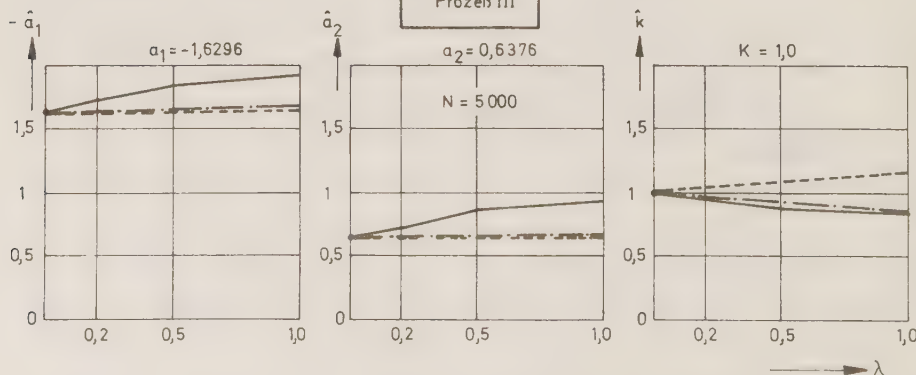


Bild 5.5.1: Schätzung von $\underline{a}$ und K als Funktion des Störpegels λ

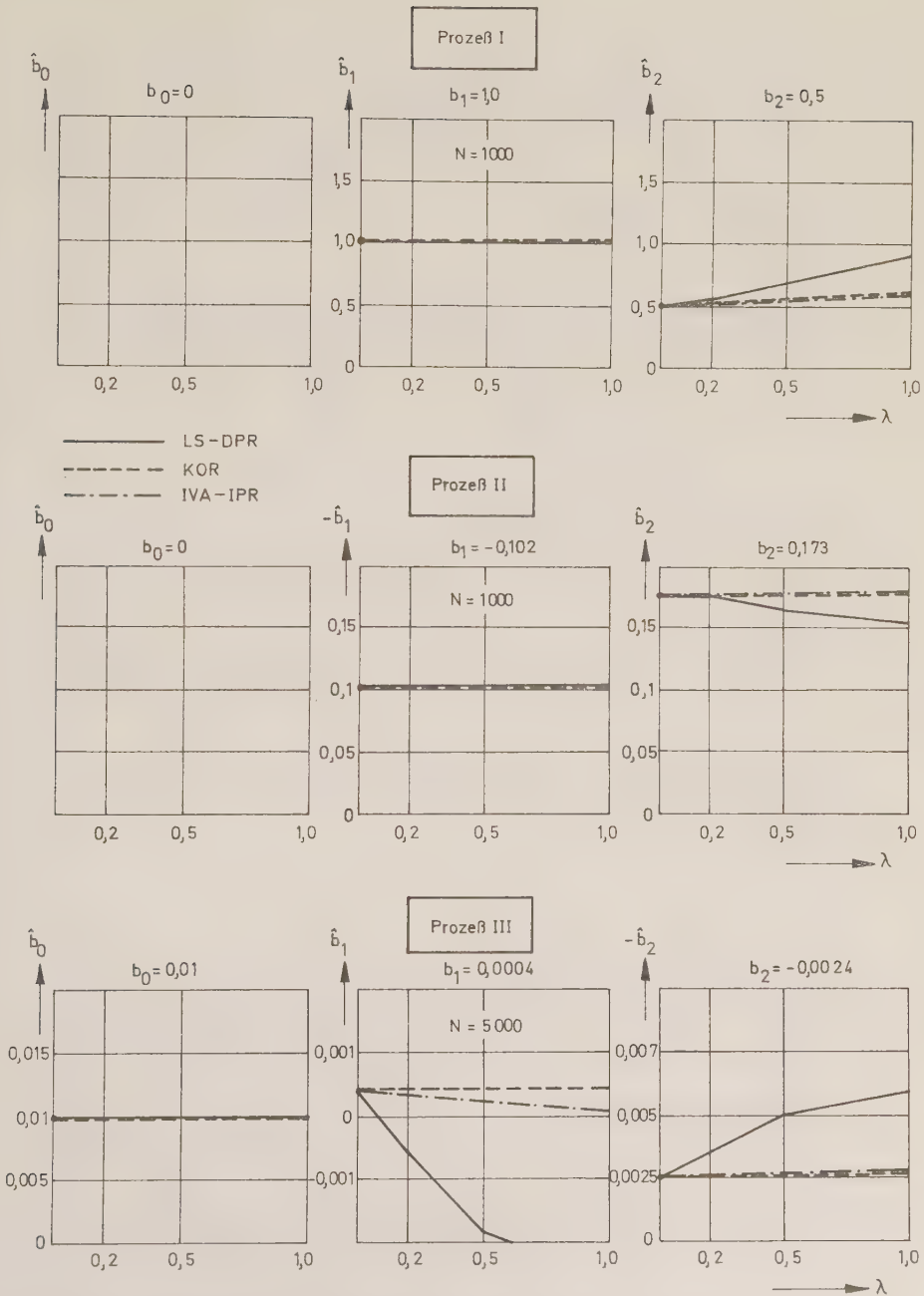
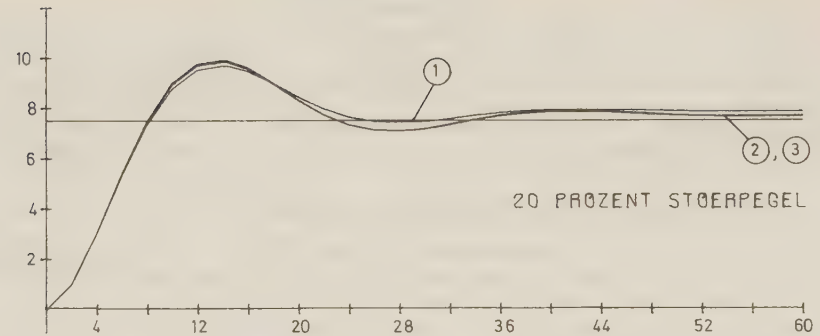


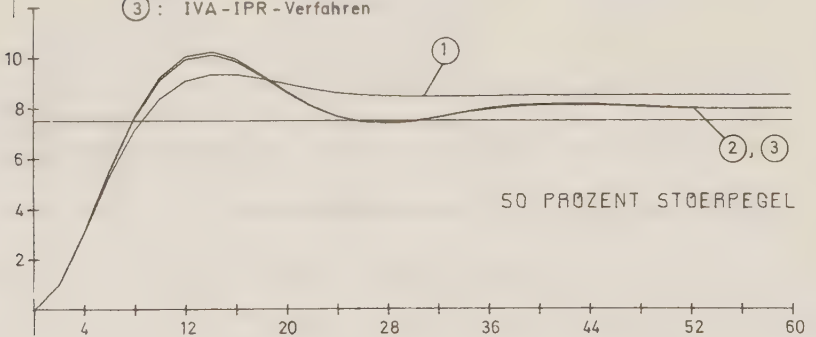
Bild 5.5.2: Schätzung der b-Parameter als Funktion des Störpegels λ



① : LS - DPR - Verfahren

② : KOR - Verfahren

③ : IVA - IPR - Verfahren



→ t/sec

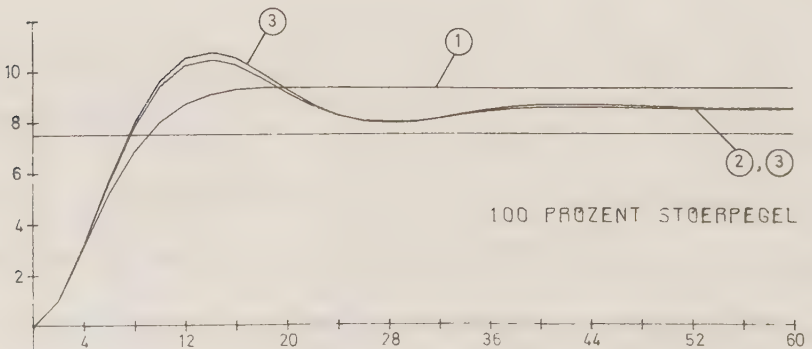


BILD 5.5.3: SCHÄTZUNG DER ÜBERGANGSFUNKTION VON PROZESS I

(T = 2, N = 1000)

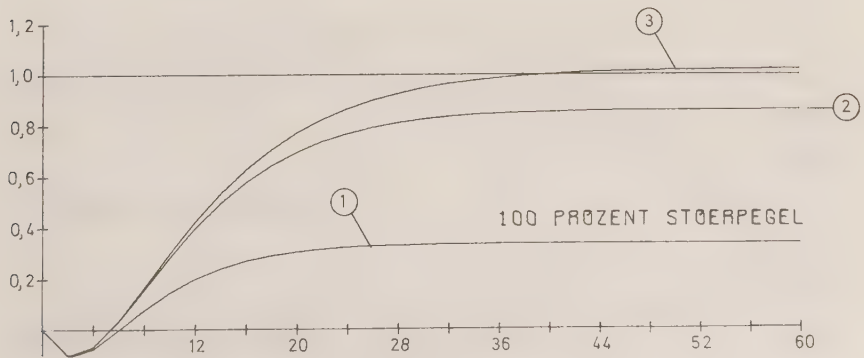
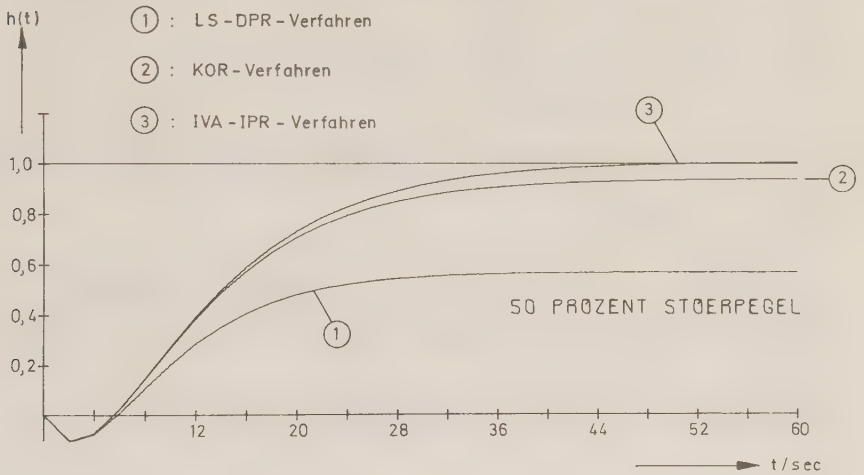
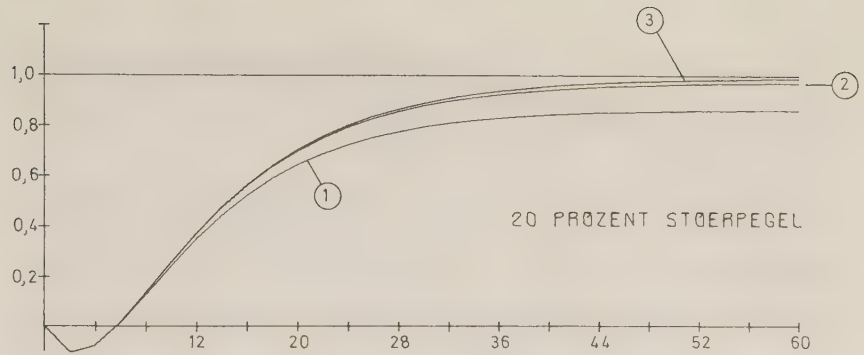


BILD 5.5.4: SCHÄTZUNG DER UEBERGANGSFUNKTION VON PROZESS II
($T_s = 2 \text{ sec}$, $N = 1000$)

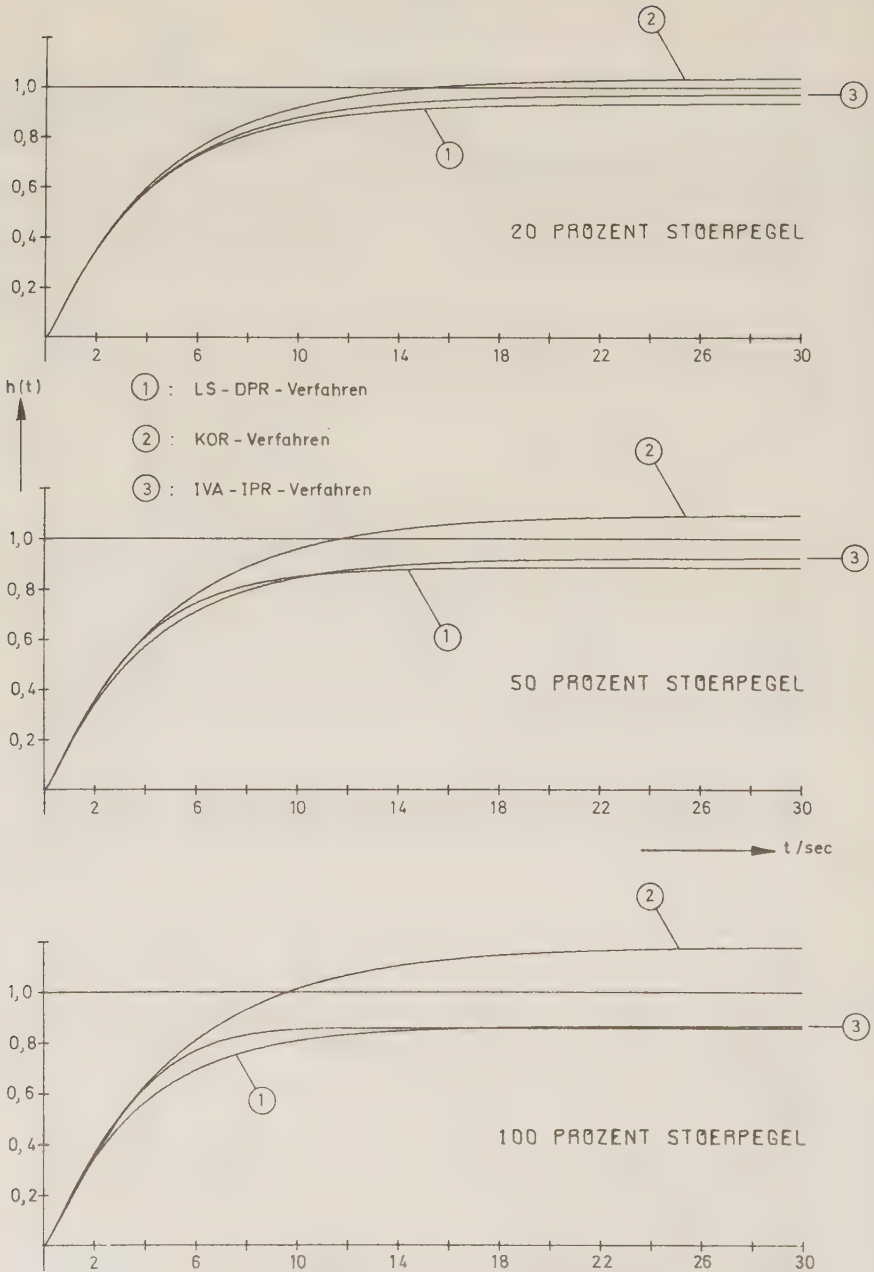


BILD 5.5.5 : SCHÄTZUNG DER UEBERGANGSFUNKTION VON PROZESS III
($T_0 = 0,1 \text{ sec}$, $N = 5000$)

5.6 Kennwerte im geschlossenen Kreis

Bezüglich der Identifizierung im geschlossenen Regelkreis gehen wir von einer Struktur gemäß Bild 4.2 und hinsichtlich des Hilfsmodells von Bild 4.3 aus. Bei einer Führungsgröße $w = 0$ ist $v(k)$ ein unabhängiges Zusatzsignal, gewählt als PRBS mit der Periode 63. Dann ist infolge der determinierten Amplitudenwerte von $v(k)$ die Schätzung der Streckenparameter ohne Kenntnis der Reglercharakteristik in direkter Weise möglich.

Prozeß I mit der z-Übertragungsfunktion:

$$F_S(z) = \frac{z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,7z^{-2}} = G_1(z) \quad (5.6.1)$$

werde durch einen diskreten PID-Regler so gesteuert, daß die Übergangsfunktion des geschlossenen Kreises gerade aperiodisch verläuft. Dies wird erreicht durch folgende Regler-Übertragungsfunktion:

$$F_R(z) = K_R \frac{1 - 1,5z^{-1} + 0,7z^{-2}}{1 - z^{-1}}, \quad (5.6.2)$$

bei $K_R = 0.2679$. (5.6.3)

Infolge der strengen Analogie zur Kennwertermittlung lediglich der Regelstrecke (offene Übertragungskette) sind auch im geschlossenen Kreis durchaus vergleichbare Simulationsergebnisse zu erwarten. Dies wird bestätigt anhand des Zeitverlaufes $\hat{p}(t)$ des geregelten Prozesses I im Bild A.5.20, verglichen mit den ursprünglichen Ergebnissen von Bild A.5.4. Dabei ist das Schätzergebnis unabhängig von der Struktur des Reglers: Das gleiche Ergebnis kann auch bei einem entsprechenden P-Regler erreicht werden.

Aehnliche Aussagen gelten auch für einen weiteren Simulationsprozeß, der als Prozeß IV folgende kontinuierliche Übertragungsfunktion 3. Ordnung besitze:

$$F_S(s) = \frac{1}{(1 + 3s)^2(1 + s)} = G_4(s) \quad (5.6.4)$$

Bei einer Abtastzeit von $T_0 = 1,4$ sec ergibt sich folgende zugehörige diskrete Übertragungsfunktion (Prozeß IV/1):

$$F_S(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{0,023072z^{-1} + 0,066628z^{-2} + 0,003070z^{-3}}{1 - 1,50078z^{-1} + 0,702517z^{-2} - 0,096972z^{-3}} \quad (5.6.5)$$

Wählt man $T_0 = 0.5$ sec, dann gilt entsprechend (Prozeß IV/2):

$$F_S(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{0,00189z^{-1} + 0,00614z^{-2} + 0,00124z^{-3}}{1 - 2,2995z^{-1} + 1,74337z^{-2} - 0,4346z^{-3}} \quad (5.6.6)$$

Bei einer Taktzeit von $\Delta T = T_0 = 1,4$ sec des PRBS-Eingangssignals für Prozeß IV/1 bzw. $\Delta T = 3 T_0 = 1,5$ sec für Prozeß IV/2 zeigen die Strukturprüfungen nach Verlustfunktion $V(n)$ und Determinantenverhältnis $DV(n)$, daß Prozeß IV/1 durch ein Modell 2. Ordnung am besten beschrieben wird (Bild 5.6.1). Dies ist eine Folge der relativ großen Abtastzeit.

Für Prozeß IV/2 läßt sich nach Bild 5.6.1 eine eindeutige Aussage über die wahrscheinlichste Modellordnung aus diesen beiden Strukturprüfverfahren nicht unmittelbar treffen. Hier müßten in der Praxis weitere Prüfverfahren herangezogen werden. Wir wollen aber diesem Prozeß die Ordnung $n = 3$ zuordnen.

Die Ergebnisse der Kennwertermittlung $\hat{p}(t)$ für Prozeß IV/1 sind bezüglich $\hat{a}(t)$ und $\lambda = 0.5$ in den Bildern A.5.21 bis A.5.23 aufgezeichnet.

Es wird deutlich, daß die statistisch verbesserten Verfahren KOR und IVA-IPR ($\rho = 0.3$) zwar den Bias der LS-Schätzung abzubauen vermögen, nicht aber den durch die verkleinerte Modellordnung bedingten prinzipiellen Fehler, der sich hauptsächlich im Parameter $\hat{a}_2$ auswirkt.

Bild A.5.25 zeigt die LS-Schätzung von Prozeß IV/2 und den gegenüber Prozeß IV/1 erheblich vergrößerten Bias in den entsprechenden a-Parametern, während nach Bild A.5.26 dieser systematische Fehler durch die IVA-IPR-Methode ($\rho = \sqrt{1/q}$) im betrachteten Meßintervall weitgehend beseitigt wird.

Legt man im geschlossenen Kreis einen PI-Regler für Prozeß IV zugrunde, mit

$$F_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (5.6.7)$$

oder als diskrete Übertragungsfunktion

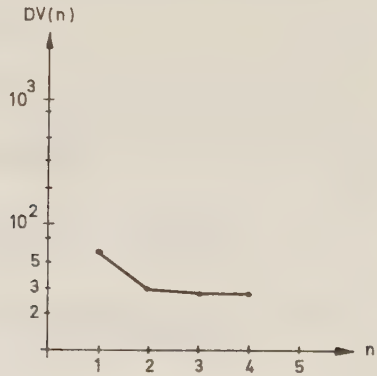
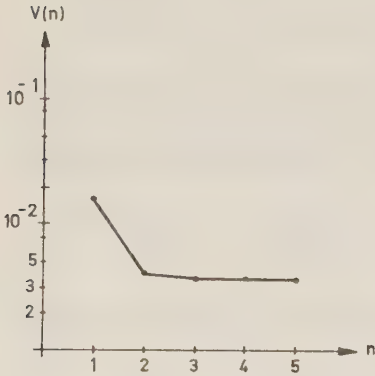
$$F_R(z) = K_R \frac{1 + T_O/T_I - z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (5.6.8)$$

dann werde der Reglerentwurf im Sinne einer Minimierung der aus dem kontinuierlichen Signal bestimmten quadratischen Regelfläche aus Stabilitätsgründen leicht korrigiert und für den diskreten Fall folgende Einstellung gewählt:

$$T_I = 11.2 \text{ sec} \quad , \quad K_R = 2.5 \quad . \quad (5.6.9)$$

Die Kennwertermittlung von Prozeß IV/1 im geschlossenen Regelkreis ist dann nahezu identisch mit den Ergebnissen der Identifizierung nur der Regelstrecke, wie ein Vergleich der Bilder A.5.23 und A.5.24 aufzeigt. Ebenso kommt auch für Prozeß IV/2 die strenge Analogie der IVA-Schätz-

Prozeß IV/1



Prozeß IV/2

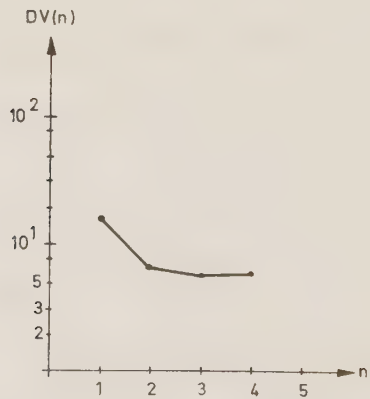
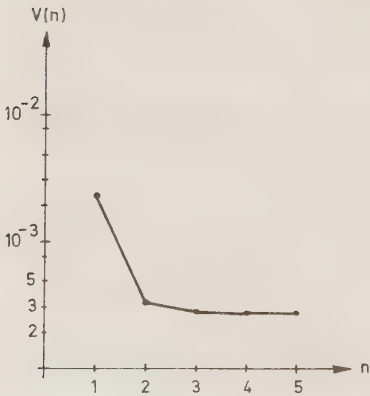


Bild 5.6.1: Strukturermittlung von Prozeß IV bei $N=500$, $\lambda=0.5$

methoden bei offenem und geschlossenem Kreis in den Bildern A.5.26 und A.5.27 deutlich zum Ausdruck. Die aufgrund dieser geschätzten Parameter berechneten diskreten Übergangsfunktionen zeigen in den Bildern 5.6.2 bis 5.6.4, daß die Prozeßdynamik auch im geschlossenen Kreis relativ genau durch die IVA-IPR-Methode identifiziert wird, daß aber mit einem größeren stationären Fehler gegenüber dem Schätzergebnis vom offenen Kreis zu rechnen ist.

5.7 Parameterbestimmung eines Mehrgrößensystems

Im Mehrgrößenfall bei 1 Eingangs- und m Ausgangsgrößen hatten wir nach Gl. (4.4.20) folgende Modellgleichung definiert:

$$\underline{y}(t) = - \sum_{i=1}^n \underline{A}_i \underline{y}(t-i) + \sum_{i=1}^n \underline{B}_i \underline{u}(t-i) + \underline{e}(t) \quad (5.7.1)$$

$$\text{mit } \underline{A}_i = \{a_{jk,i}\} \quad , \quad \underline{B}_i = \{b_{jk,i}\} \quad (5.7.2)$$

$$\text{und } \underline{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T \quad , \quad \underline{u} = [u_1, u_2, \dots, u_1]^T \quad (5.7.3)$$

Um einen Vergleich mit den Schätzergebnissen des verallgemeinerten LS-Verfahrens (GLS) zu ermöglichen, wählen wir nach /58/ folgenden Testprozeß 2.Ordnung, bei 2 Eingangs- und 2 Ausgangsgrößen, d.h. $n = 2, \quad l = m = 2$:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = & \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.75 \end{bmatrix} \underline{x}(t-1) - \begin{bmatrix} 0.56 & 0 \\ 0 & 0.765 \end{bmatrix} \underline{x}(t-2) + \\ & + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \underline{u}(t-1) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.42 \\ 0.51 & 0.81 \end{bmatrix} \underline{u}(t-2) \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

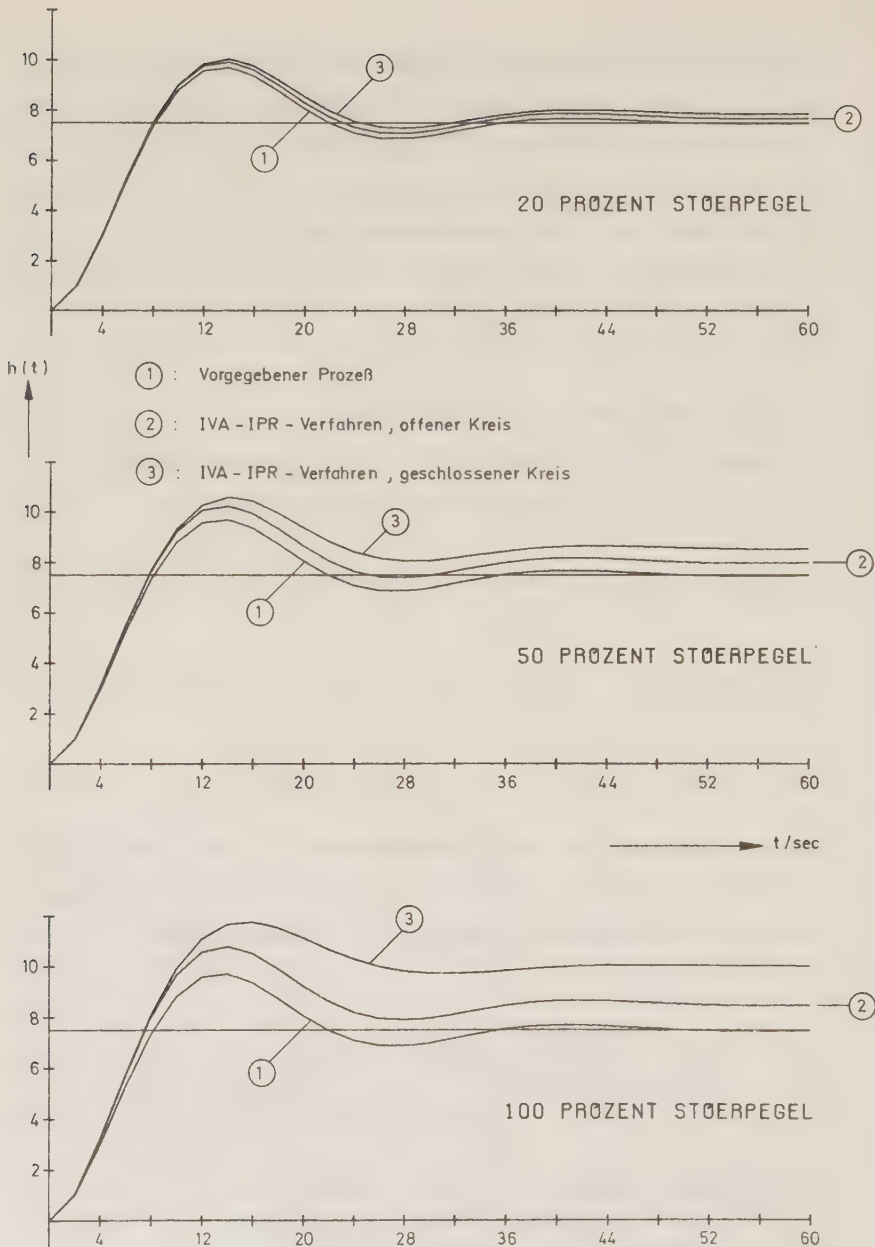


BILD 5.6.2: SCHÄTZUNG DER UEBERGANGSFUNKTION VON PROZESS I
($T_0 = 2 \text{ sec}$, $N = 1000$)

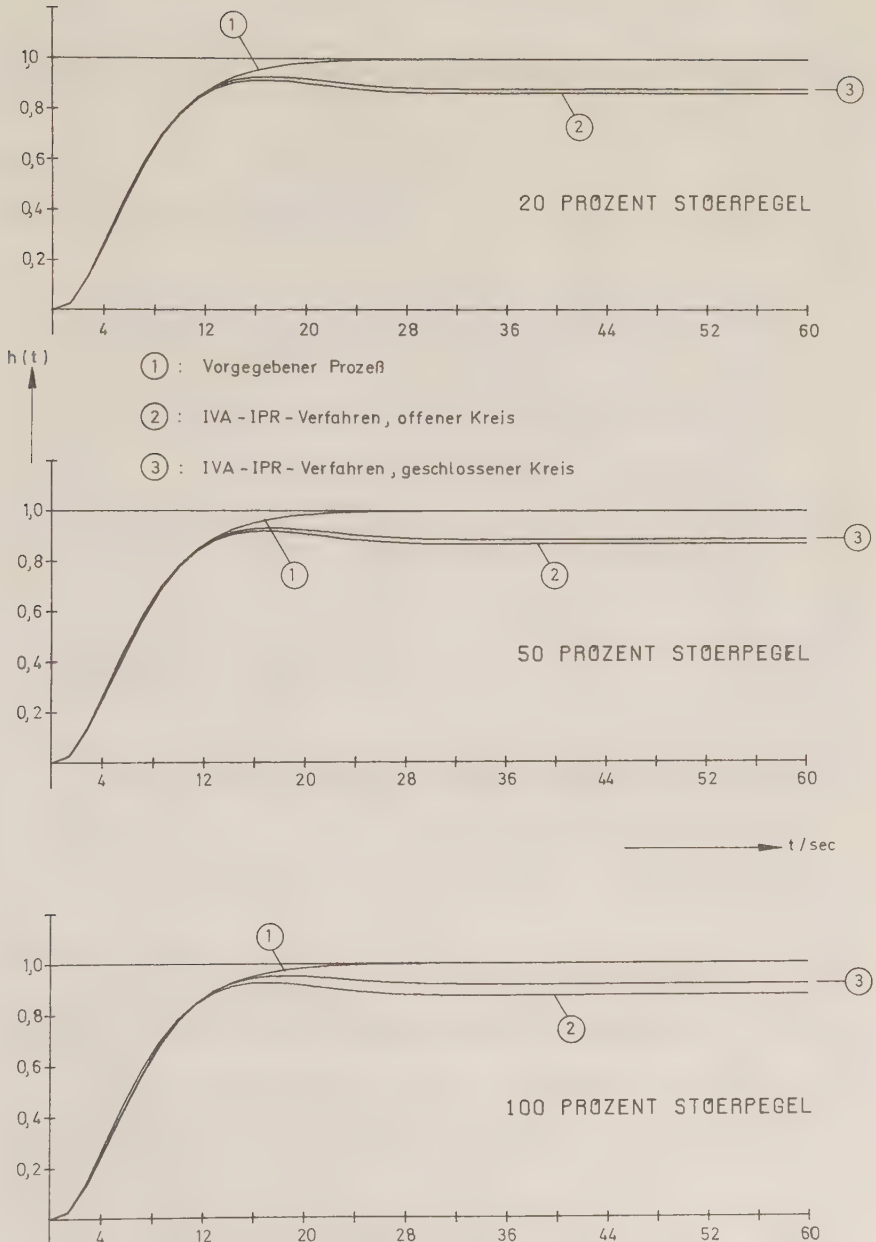


BILD 5.6.3: SCHÄTZUNG DER UEBERGANGSFUNKTION VON PROZESS IV/1
 ($T_0 = 1,4 \text{ sec}$, $N = 2000$)

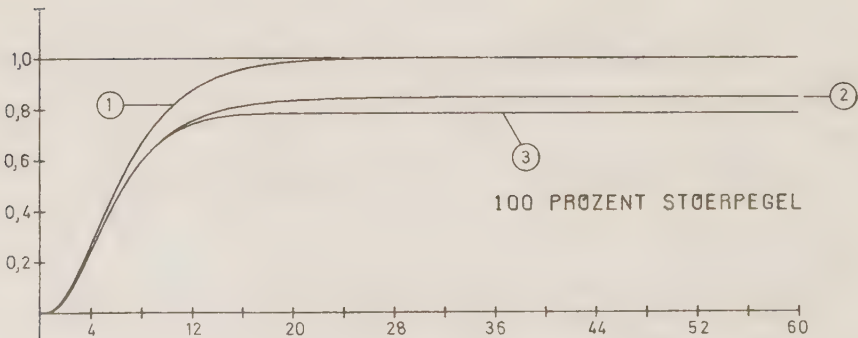
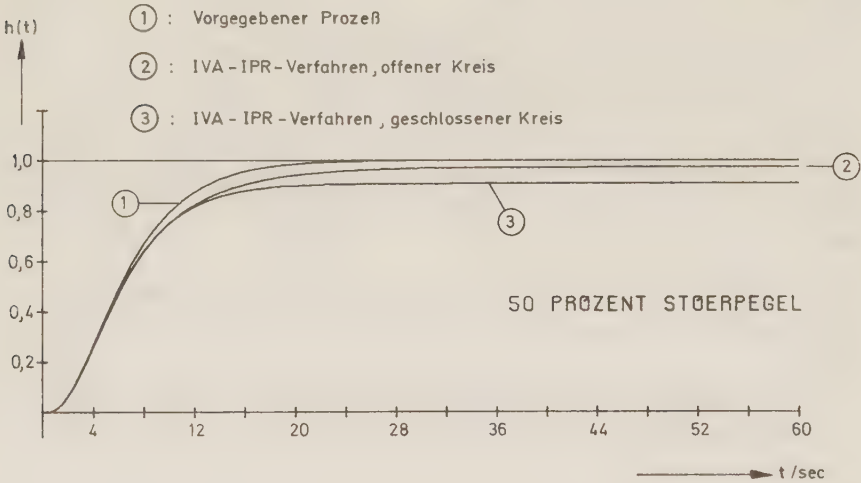
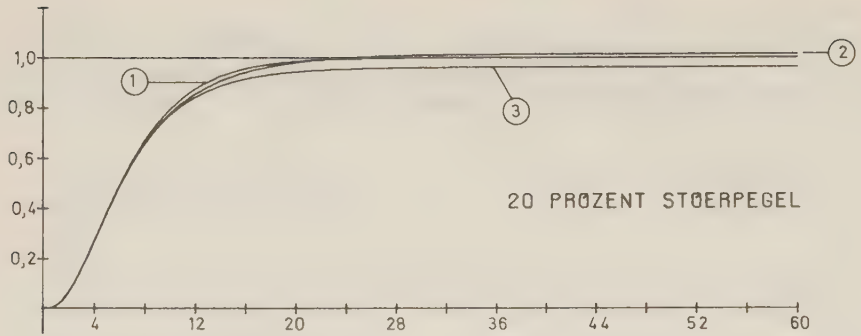


BILD 5.6.4 : SCHÄTZUNG DER UEBERGANGSFUNKTION VON PROZESS IV/2
($T = 0,5 \text{ sec}$, $N = 5000$)

$$\underline{y}(t) = \underline{x}(t) + \underline{e}(t) \quad (5.7.5)$$

$$\underline{e}(t) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} \underline{e}(t-1) - \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \underline{e}(t-2) + \underline{\xi}(t-1) \quad (5.7.6)$$

Der Störprozeß $\underline{\xi}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t)]^T$ besteht aus 2 unabhängigen, diskreten $(0, \sigma^2)$ -normalverteilten weißen Geräuschen, wobei $\sigma = 0.1$ gewählt wird. Bei der GLS-Methode sind dann aufgrund des Störmodellansatzes 24 Parameter zu bestimmen, während bei der IVA-Methode lediglich die 16 Prozeßparameter zu bestimmen sind, die darüber hinaus in 2 aufeinanderfolgenden Schritten von jeweils 8 Parametern ermittelt werden können.

Bei 2 PRBS-Eingangssignalfolgen mit der Periode 63 sind die Schätzungen $\hat{\underline{p}}(t)$ der von Null verschiedenen Prozeßkennwerte in den Bildern A.5.28 bis A.5.33 dargestellt. Auffallend ist der durch die IVA-IPR-Methode bewirkte rasche Abbau des in der LS-Schätzung enthaltenen systematischen Fehlers, der sich hauptsächlich in den a-Parametern zeigt. Während man nach Bild A.5.31 bei dem gewählten Störpegel schon nach etwa 1.000 Rekursionen die IVA-IPR-Schätzung als quasistationär bezeichnen kann, liegen diese Verhältnisse bei der GLS-Schätzung gemäß /58/ erst nach etwa 10.000 Rekursionen vor. Daraus ergibt sich eine weitere, für Mehrgrößensysteme sehr bedeutsame Eigenschaft der IVA-IPR-Methode, die sich von allen statistisch verbesserten Verfahren nicht nur auf ein Minimum an benötigter Rechenzeit pro Rekursion stützt, sondern auch nur ein Minimum an Rekursionen verlangt, um quasistationäre Schätzwerte zu erhalten.

5.8 Identifizierung einer Dampferzeuger-Regelstrecke

Während in den vorangegangenen Kapiteln die Ergebnisse der Modellbestimmung von Simulationsprozessen vorgestellt wurden, soll abschließend der Einsatz des indirekt-pseudorekursiven Hilfsvariablenverfahrens zur Bestimmung der Dynamik eines realen Prozesses gezeigt werden. Dazu wurde die Ölstromregelstrecke der Feuerungsregelung eines Dampferzeugers im Heizkraftwerk der Universität Stuttgart ausgewählt. Es handelt sich hierbei um einen Trommel-Dampferzeuger mit einer Nennleistung von 64 t/h bei einer Temperatur von 525°C und einem Druck von 82 kp/cm².

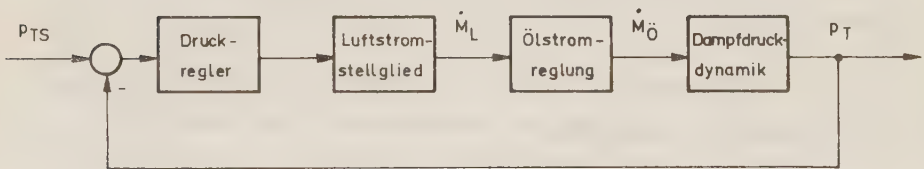


Bild 5.8.1: Prinzip der Dampfdruckregelung

Das Prinzip der Dampfdruck- oder Feuerungsregelung des Trommelkessels geht aus Bild 5.8.1 hervor. Danach wird der gemessene Trommeldruck p_T als Regelgröße in Verbindung mit dem Dampfdruckregler zur Verstellung des Luftstromes $\dot{M}_L$ benutzt, und dieser Luftstrom wirkt als Führungsgröße der unterlagerten Ölstromregelung. Die Verstellung von $\dot{M}_L$ erfolgt dabei über die Änderung der Drehzahl des Frischlüfters und der Stellung von Drallklappen im Frischlüfteransaugstutzen. Diese Stellglieder zeigen integrierendes Verhalten.

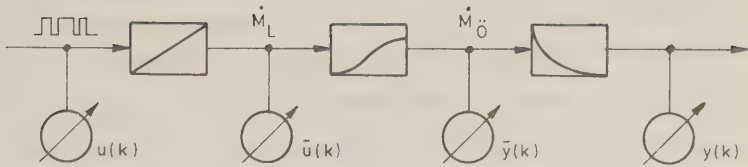


Bild 5.8.2: Anordnung zur Kennwertermittlung der Ölstromregelstrecke

Zur Kennwertermittlung des Teilsystems Ölstromregelstrecke wird dieser Prozeß mit einem mittelwertfreien PRBS-Signal $u(k)$ der Periode 31 angeregt, wobei die Taktzeit ΔT der Abtastzeit $T_0 = 1 \text{ sec}$ entspricht. Infolge der integrierenden Wirkung des Stellgliedes ist die Änderungsgeschwindigkeit des Luftstromes $\dot{M}_L$ als eigentliche Prozeß-Eingangsgröße erheblich geringer, als durch das PRBS-Signal $u(k)$ vorgegeben. Durch eine Differentiation des Ausgangssignales Ölstrom $\dot{M}_O$ wird versucht, diese integrierende Wirkung der Stelleinrichtung zu kompensieren. Aufgrund der Anordnung nach Bild 5.8.2 mit den Meßwerten $u(k)$, $\tilde{u}(k)$, $\tilde{y}(k)$ und $y(k)$ lassen sich 3 Übertragungsfunktionen zur Beschreibung der Streckendynamik definieren:

$$G_1(z) = \tilde{Y}(z) / U(z) \quad (5.8.1)$$

$$G_2(z) = Y(z) / U(z) \quad (5.8.2)$$

$$G_3(z) = \tilde{Y}(z) / \tilde{U}(z) \quad (5.8.3)$$

$G_1(z)$ enthält auch die Dynamik des Stellgliedes, während aus $G_2(z)$ und $G_3(z)$ die Prozeßdynamik direkt bestimmbar ist.

Zur Ermittlung der Kennwerte dieser 3 Übertragungsfunktionen stehen zwischen 270 und 290 Meßwerte zur Verfügung, die normiert und mittwertbereinigt worden sind. Die Anwendung der Strukturprüfverfahren nach Kapitel 4.1 zeigt, daß die günstigste Modellordnung für die 3 Fälle im Bereich $2 \leq n \leq 4$ liegt. Die mit dem IVA-IPR-Verfahren erzielten Schätzergebnisse sind zunächst im Bild 5.8.3 dargestellt, das die aufgrund der ermittelten Kennwerte berechneten Übergangsfunktionen zeigt. Das integrale Verhalten von $G_1(z)$ kommt in $\hat{h}_1(t)$ zum Ausdruck, während $\hat{h}_2(t)$ und $\hat{h}_3(t)$ die Dynamik der eigentlichen Ölstromregelstrecke kennzeichnen. Dabei fällt auf, daß die aufgrund der differenzierten Meßwerte $y(t)$ gewonnenen Kennwerte ein langsames Einschwingverhalten $\hat{h}_2(t)$ bewirken als die Schätzwerte für $G_3(z)$. Dies ist eine Folge des durch das Differenzieren vergrößerten Störpegels in Verbindung mit einem relativ kleinen Meßintervall. Vergleicht man die Prozeßausgangssignale mit den geschätzten Modellausgängen in den Bildern 5.8.4 und 5.8.5, dann zeigt sich, daß die Schätzung von $G_3(z)$ den Ausgangssignalverlauf am besten approximiert.

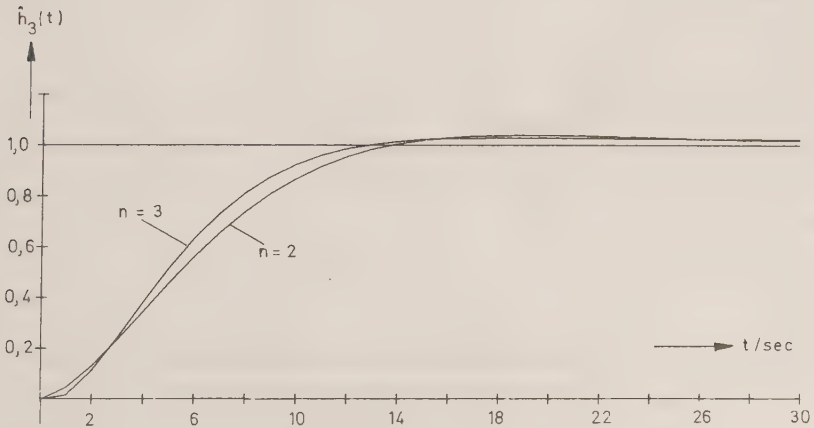
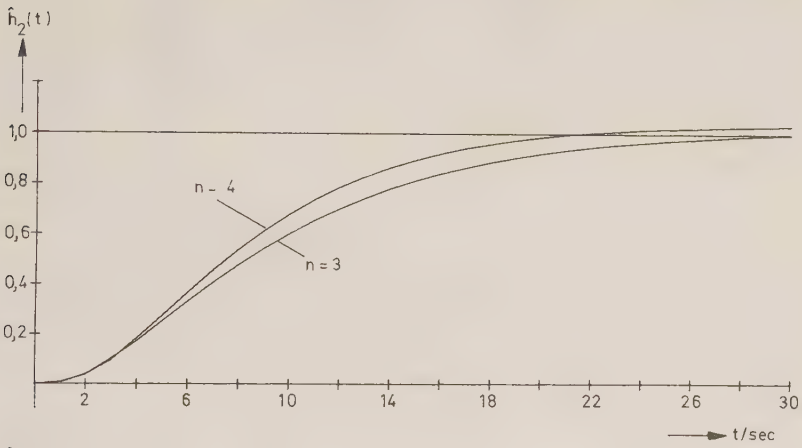
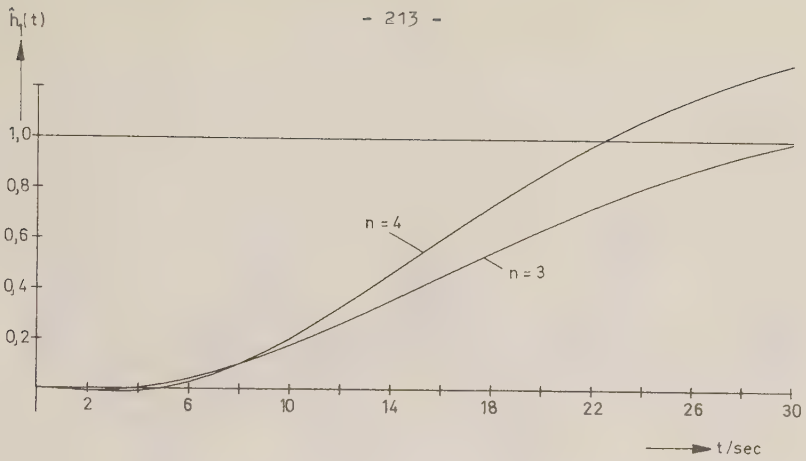


Bild 5.8.3: Schätzung der Uebergangsfunktionen bei verschiedenen Ordnungen

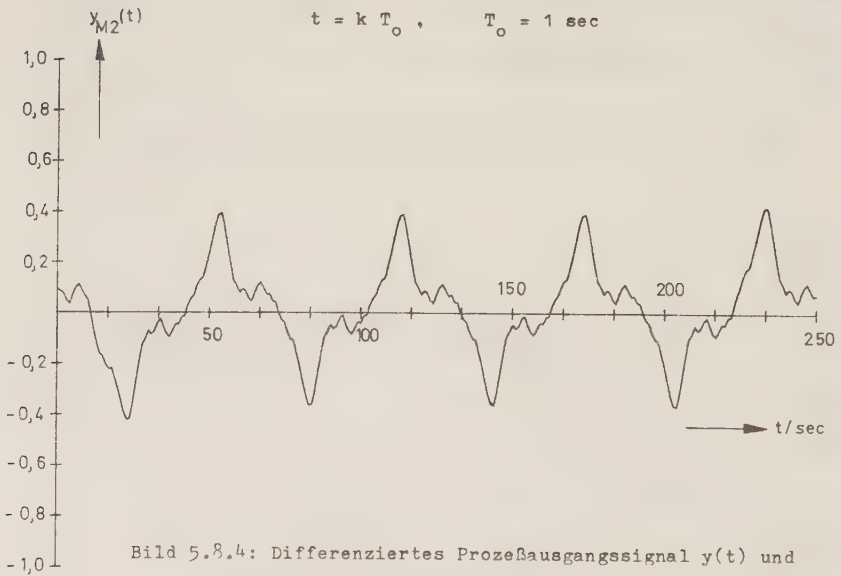
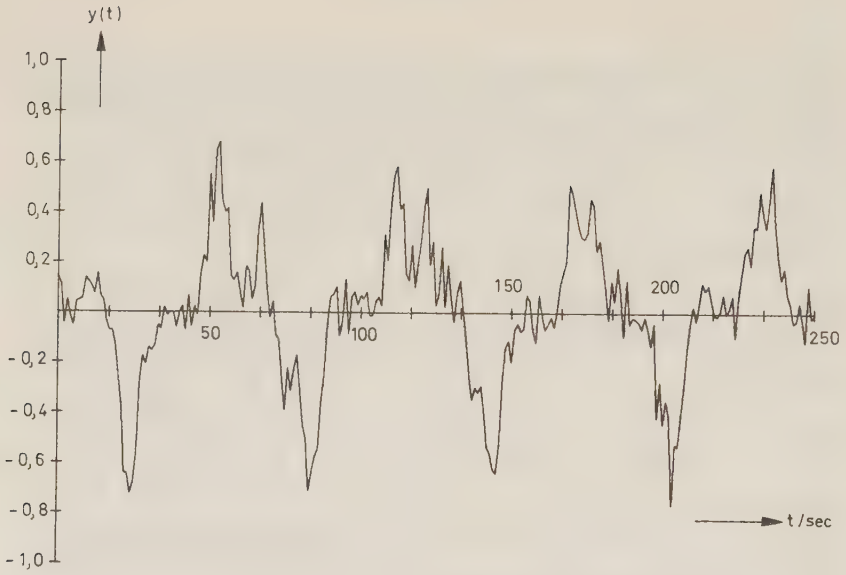


Bild 5.8.4: Differenziertes Prozeßausgangssignal $y(t)$ und
Modellausgangssignal für $G_2(z)$ ($n = 3$)

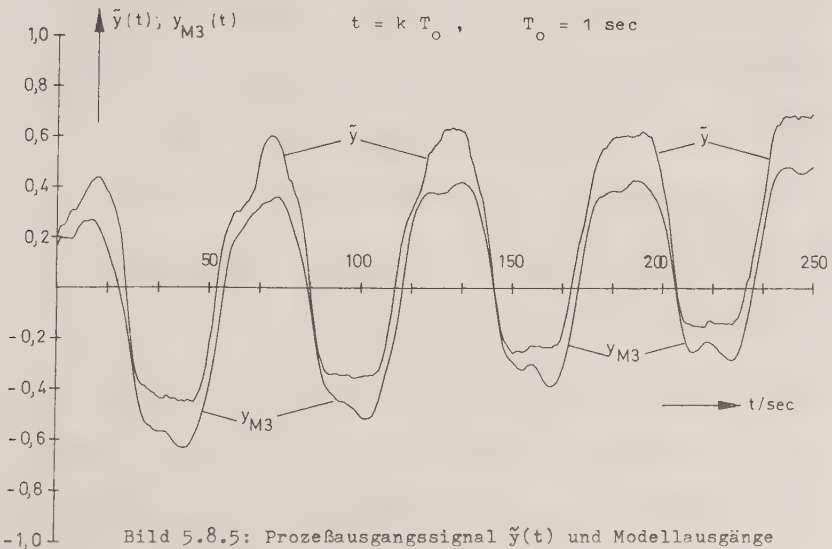
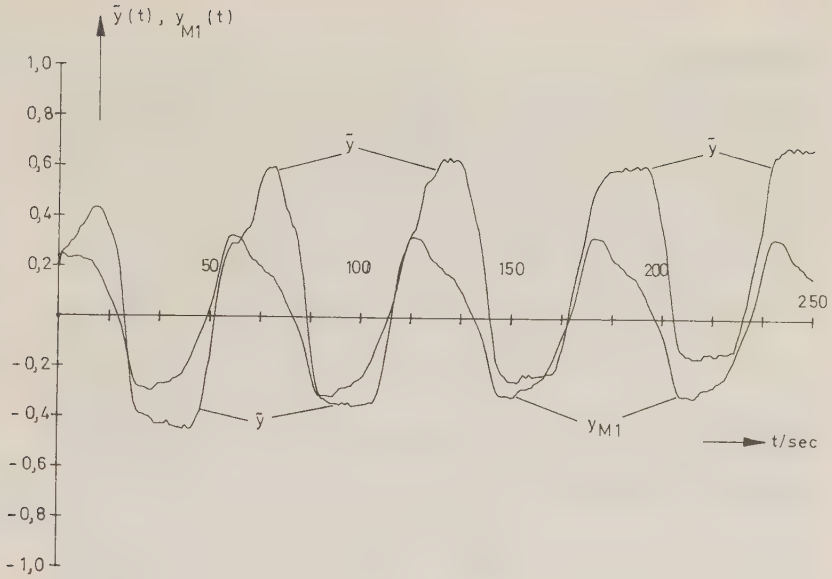


Bild 5.8.5: Prozeßausgangssignal $\tilde{y}(t)$ und Modellausgänge y_{M1} ($n = 4$) bzw. y_{M3} ($n = 3$)

6. Zusammenfassung

Aus praxisnahen Überlegungen erscheint es zweckmäßig, die Aufgabe der Systemidentifizierung mittels Prozeßrechner zu lösen. Dies setzt die Auswahl eines Systemmodelles voraus, das einerseits die charakteristische Dynamik des unbekannten Prozesses möglichst genau zu bestimmen erlaubt, andererseits den rechnerspezifischen Eigenschaften und der diskontinuierlichen Arbeitsweise Rechnung trägt. Ein geeignetes mathematisches Modell ist die lineare Form einer Differenzengleichung n -ter Ordnung, die als Zeitreihe die meßbaren Ein- und Ausgangsgrößen zu verschiedenen Abtastzeitpunkten verknüpft. Nach der strukturellen Festlegung des Systemmodells besteht die Identifikationsaufgabe nur noch darin, die unbekannten Systemparameter aus verrauschten Meßwerten optimal zu bestimmen. Im einfachsten Falle und unter bestimmten Voraussetzungen kann dies mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (LS-Methode) erreicht werden. Da diese einfache Methode bei dem in Zeitreihenform gewählten diskreten Modell jedoch einen systematischen Fehler (Bias) liefert, sind zur biasfreien Parameterschätzung eine Reihe statistisch verbesserter Verfahren herangezogen worden, die sich prinzipiell in 2 Gruppen einteilen lassen:

- a) Das Prozeßmodell wird um ein Störmodell erweitert, das die Korrelationen miterfaßt.
- b) Durch geeignete Filterung der Meßsignale wird der Bias der Schätzung vermieden (KOR-, IVA-Verfahren).

Den Verbesserungen in statistischer Hinsicht stehen allerdings ungünstigere numerische Eigenschaften entgegen. Es ist nun bekannt, daß von allen verbesserten Schätzmethoden das Hilfsvariablenverfahren (IVA-Verfahren) den bei weitem geringsten numerischen Aufwand an Speicherplätzen und Rechenzeit benötigt. Da man für einen on-line-Einsatz zweckmäßigerweise von der rekursiven Form (REK) ausgeht,

ist der numerische Aufwand der IVA-Schätzung nur geringfügig größer als der Aufwand der entsprechenden LS-Schätzung. Das rekursive IVA-Verfahren (IVA-REK) enthält nun zwei generelle Schwächen:

1. Die Konvergenz ist wie bei allen rekursiven Verfahren von der Vorgabe geeigneter Startwerte abhängig, die versuchsweise oder durch Vorabschätzungen erst ermittelt werden müssen.
2. Die numerische Stabilität des IVA-Verfahrens ist erheblich kritischer als die des LS-Verfahrens.

Es wird nun zunächst gezeigt, wie die Schwierigkeit, geeignete Startwerte finden zu müssen, umgangen werden kann. Da das Sammeln von Meßwerten rekursiv gestaltet werden kann, erhält man nach jedem Abtastschritt ein genau bestimmtes Gleichungssystem, daß explizit mit dem Gauß'schen Algorithmus lösbar ist. Diese numerische Version wird universell explizit (UVEX) genannt und ist für die LS- und IVA-Methode anwendbar. Für die LS-Methode kann weiterhin durch ein orthogonales Transformationsverfahren, das auf der Reduktion von Meßdaten beruht, die Abhängigkeit der Konvergenz von den Startwerten eliminiert werden. Der Einsatz dieser sog. direkt-pseudorekursiven Version (DPR) ist bei der IVA-Methode allerdings nicht möglich.

Ein Vergleich des numerischen Aufwandes der einzelnen Versionen für die statistische LS-Methode zeigt, daß die UVEX-Version und besonders das DPR-Verfahren der üblicherweise verwandten rekursiven Form hinsichtlich der benötigten Rechenzeit erheblich überlegen ist, bei etwa gleichem Speicherplatzbedarf. Um weiterhin die numerische Stabilität der einzelnen Verfahren vergleichen zu können, wird eine Analyse anhand der charakteristischen Konditionszahlen durchgeführt. Die Konditionszahl ist ein Maß für die Genauigkeit oder Eindeutigkeit einer numerischen Lösung, die damit die Grundlage für die gewünschte statistische Eigenschaft der Konsistenz einer Schätzung bildet. Da die

Konditionszahl eine relative Größe ist, wird diese in Bezug zur endlichen Wortlänge von Digitalrechnern gebracht und Abschätzungen über die Genauigkeit der Lösungen bei vorgegebener Konditions- und Stellenzahl angegeben.

Das Ergebnis dieser Analyse zeigt, daß die numerische DPR-Version der UVEX-Version hinsichtlich der Konditionszahl immer überlegen ist, während andererseits die IVA-Verfahren prinzipiell schlechter konditioniert sind als die entsprechenden LS-Verfahren.

Grundlage des neuen Verfahrens ist zunächst die statistische Hilfsvariablentheorie. In numerischer Hinsicht zeichnet es sich dadurch aus, daß es die durch die REX- oder UVEX-Version vorgegebene Konditionszahl erheblich verbessert. Diese Konditionsverbesserung wird durch eine sog. H-Transformation erzielt, die die ursprüngliche UVEX-Schätzgleichung in eine Form überführt, die die Anwendung der DPR-Strategie ermöglicht. Damit ergibt sich ein sehr stabiles Lösungsverfahren, das die günstigen Eigenschaften von Verfahren für positiv definite Koeffizientenmatrizen besitzt.

Da das neue Verfahren von der UVEX-Schätzgleichung ausgeht, stellt es eine Kombination von UVEX- und DPR-Verfahren dar. Es wird als indirekt-pseudorekursiv (IPR) bezeichnet und benötigt erheblich weniger Rechenzeit als die rekursive Form, vornehmlich in Richtung wachsender Systemordnung. Daher ist dieses neue IVA-IPR-Verfahren besonders zur Identifizierung von Mehrgrößensystemen geeignet, da hier die Zahl der zu bestimmenden Parameter erheblich ansteigt. Ebenfalls einfach läßt sich die Parameterschätzung im geschlossenen Regelkreis durchführen, wenn man von einem zusätzlichen Stör- oder Nutzsignal im Regelkreis ausgeht.

Neben den bekannt günstigen Eigenschaften der Hilfsvariablen-

methode, d.h.

- die Systemparameter werden direkt bestimmt und lassen sich unmittelbar zur Regelung heranziehen,
- die Kennwerte sind bei schwach und stark gestörten Prozessen ermittelbar,
- es werden keine speziellen Testsignale verlangt, es sind vielmehr natürliche, aus dem laufenden Prozeß stammende Eingangssignale verwendbar,

zeichnet sich das neue indirekt-pseudorekursive Verfahren gegenüber der rekursiven IVA-Version durch folgende verbesserte Eigenschaften aus, die gerade beim Einsatz kleinerer Prozeßrechner mit eng begrenztem Speicherplatz, kleinerer Wortlänge und größeren Befehlsausführungszeiten relevant sind:

- Verbesserte numerische Stabilität und schnellere, problemlose Konvergenz (geringere Datenmenge),
- erheblich reduzierte Rechenzeit bei etwa gleichem Speicherbedarf,
- beliebige Verwendbarkeit als on-line oder off-line Verfahren.

Da das IVA-IPR-Verfahren zum Anlauf eine "Starthilfe" benötigt, läuft es im kritischen Anfangsintervall als direkt-pseudorekursives LS-Verfahren an, in Form des numerisch stabilsten Verfahrens überhaupt, das es daher als Sonderfall enthält. Damit werden auch quasi ohne Mehraufwand Strukturprüfungen möglich, einfache Verfahren zur Vorabbestimmung der günstigsten Modellordnung, und ebenso ein einfacher Test der zu erwartenden Konditionszahl.

Dieses derart entwickelte neue Parameterschätzverfahren wurde anschließend anhand einiger am Digitalrechner simulierter Prozesse getestet, wobei die Prozesse so gewählt wurden, daß Vergleiche zu den Ergebnissen an anderer Stelle und mit anderen Verfahren ermög-

licht wurden. Dabei zeigten sich die gewünschten numerischen und statistischen Eigenschaften, nämlich eindeutige und konsistente Schätzergebnisse, wobei sich auch die einfachen Strukturprüfverfahren und der Konditionstest als brauchbar erwiesen. Dies gilt für die Kennwertermittlung sowohl der Regelstrecke als auch für die Identifizierung im geschlossenen Regelkreis. Die Vorteile des neuen Verfahrens traten besonders bei der Parameterschätzung eines Mehrgrößensystems mit 2 Eingangs- und 2 Ausgangsgrößen hervor. Schließlich wurde das neue Verfahren zur Identifizierung der Ölstromregelstrecke eines Dampferzeugers anhand echter Meßwerte herangezogen.

L: Literaturverzeichnis
=====

- /1/ Eykhoff, P. System Identification.
John Wiley, New York, 1974
- /2/ Mehra, R.K. Optimal Input Signals for Parameter Estimation
in Dynamic Systems - Survey and New Results.
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6,
S. 753-768
- /3/ Goodwin, G.C. Coupled Design of Test Signals, Sampling
Zarrop, M.B. Intervals and Filters for System Identification.
Payne, R.L. IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6,
S. 748-752
- /4/ Föllinger, O. Lineare Abtastsysteme.
R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1974
- /5/ Ackermann, J. Abtastregelung.
Springer Verlag, Berlin, New York, 1972
- /6/ Brammer, K. Kalman-Bucy-Filter. Deterministische
Siffling, G. Beobachtung und stochastische Filterung.
R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1975
- /7/ Leondes, C.T. Optimal Minimal-Order Observers for Discrete-
Novak, L.M. Time Systems - A Unified Theory.
Automatica (GB), 8(1972), S. 379-387
- /8/ Lee, R.C.K. Optimal Estimation, Identification and Control.
MIT Press, Cambridge, Mass., 1964
- /9/ Åström, K.J. Introduction to Stochastic Control Theory.
Academic Press, New York, London, 1970
- /10/ Unbehauen, H. Parameterschätzverfahren zur Systemidentifi-
Göhring, B. kation.
Bauer, B. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1974

- /11/ Scheurer, H.G.
Schenk, R. Neues Identifikationsverfahren auf der Grundlage der Korrelationsverfahren. Regelungstechnik, 8(1975), S. 275-280
- /12/ Scheurer, H.G. Ein für den Prozeßrechnereinsatz geeignetes Identifizierungsverfahren auf der Grundlage der Korrelationsverfahren. Dissertation, TU Trier-Kaiserslautern, 1973
- /13/ Isermann, R. Prozeßidentifikation. Springer Verlag, Berlin, New York, 1974
- /14/ Schenk, R.
Scheurer, H.G. Vergleich einiger moderner Parameterschätzverfahren. Regelungstechnik, 1(1976), S. 11-19
- /15/ Gustavsson, I. Comparison of Different Methods for Identification of Industrial Processes. Automatica (GB), 8(1972), S. 127-142
- /16/ Saridis, G.N. Comparison of Six On-Line Identification Algorithms. Automatica, 10(1974), S. 69-79
- /17/ Krebs, V.
Thöm, H. Parameter-Identifizierung nach der Methode der Kleinsten Fehlerquadrate - ein Ueberblick. Regelungstechnik, 22(1974)1, S. 1-10
- /18/ Zielke, G. Numerische Berechnung von benachbarten inversen Matrizen und linearen Gleichungssystemen. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1970
- /19/ Wernstedt, J.
Peter, U. Zur Parameterschätzung statischer Systeme mit Hilfe der rekursiven Regression. Messen, Steuern, Regeln, 14(1971)3, S. 96-100
- /20/ Stoer, J. Einführung in die numerische Mathematik I. Springer Verlag, Berlin, New York, 1972

- /21/ Unbehauen, H.
Göhring, B. Modellstrukturen und numerische Methoden für statistische Parameterschätzverfahren zur Identifikation von Regelsystemen. Regelungstechnik, 11(1973), S. 345-376
- /22/ Peterka, V.
Šmuk, K. On-Line Estimation of Dynamic Model Parameters from Input-Output Data. IFAC-Kongreß Warschau 1969, Sess. 26, S. 3-26
- /23/ Šmuk, K. Comparison of some Algorithms for Least-Squares Updating. 2. IFAC-Symposium, Prag 1970, Beitrag 2.10
- /24/ Peterka, V.
Åström, K.J. Control of Multivariable Systems with Unknown but Constant Parameters. 3. IFAC-Symposium, Den Haag 1973, Beitrag TA-1, S. 535-544
- /25/ Gill, P.E.
Golub, G.H.
Murray, W.
Saunders, M.A. Methods for Modifying Matrix Factorizations. Math. Comp., 28(1974)126, S. 505-535
- /26/ Hanson, R.J.
Lawson, C.L. Extensions and Applications of the Householder Algorithm for Solving Linear Least Squares Problems. Math. Comp., 23(1969), S. 787-812
- /27/ Wong, K.Y.
Polak, E. Identification of Linear Discrete Time Systems Using the Instrumental Variable Method. IEEE Trans. Aut. Contr., AC-12(1967)6, S. 707-718
- /28/ Young, P.C. An Instrumental Variable Method for Real-Time Identification of a Noisy Process. Automatica, 6(1970), S. 271-286
- /29/ Söderström, T. Convergence of Identification Methods Based on the Instrumental Variable Approach. Automatica, 10(1974), S. 685-688

- /30/ Finigan, B.
Rowe, I.H. On the Identification of Linear Discrete Time
System Models Using the Instrumental Variable
Method.
3. IFAC-Symposium, Den Haag 1973, Beitrag TM-5,
S. 729-735
- /31/ Finigan, B.
Rowe, I.H. Strongly Consistent Parameter Estimation by the
Introduction of Strong Instrumental Variables.
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6,
S. 825-830
- /32/ Pandya, R.N.
Pagurek, B. Two Stage Least Squares Estimators and their
Recursive Approximations.
3. IFAC-Symp., Den Haag 1973, Beitrag TM-2,
S. 701-710
- /33/ Pandya, R.N. A Class of Bootstrap Estimators and their
Relationship to the Generalized Two Stage
Least Squares Estimators.
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6,
S. 831-835
- /34/ Zurmühl, R. Matrizen und ihre technische Anwendungen.
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1964
- /35/ Collatz, L. Funktionsanalysis und numerische Mathematik.
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1964
- /36/ Wilkinson, J.H. Rundungsfehler.
Springer Verlag, Berlin, New York, 1969
- /37/ Westlake, J.R. A Handbook of Numerical Matrix Inversion and
Solution of Linear Equations.
John Wiley, New York, London, 1968
- /38/ Audley, D.R.
Lee, D.A. Ill-Posed and Well-Posed Problems in System
Identification.
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6,
S. 732-747

- /39/ Liu, B. Effect of Finite Word Length on the Accuracy
of Digital Filters - A Review.
IEEE Trans. Circ. Theory, CT-18(1971)6,
S. 670-677
- /40/ Knowles, J.B. Coefficient Accuracy and Digital Filter Response.
Olcayto, E.M. IEEE Trans. Circ. Theory, CT-15(1968)1,
S.31-41
- /41/ Scheel, K.H. Der Einfluß des Rundungsfehlers beim Einsatz
des Prozeßrechners.
Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung,
8(1971), S. 326-331
- /42/ Kuo, F.F. System Analysis by Digital Computers.
Kaiser, J.F. John Wiley, London, New York, 1966
- /43/ Gold, B. Digital Processing of Signals.
Rader, C.M. Mc Graw Hill, New York, London, 1969
- /44/ Kaiser, J.F. Some Practical Considerations in the Realization
of Linear Digital Filters.
3. Ann. Allerton Conf. Circ/Syst. Theory, 1965
- /45/ Stewart, G.W. Modifying Pivot Elements in Gaussian Elimination
Math. Comp., 28(1974)126, S. 537-542
- /46/ Franklin, J.N. Well-Posed Stochastic Extensions of Ill-Posed
Linear Problems.
Journal Math. Anal./Appl., 31(1970), S.682-716
- /47/ Unbehauen, H. Application of Different Statistical Tests for
Göhring, B. the Determination of the Most Accurate Order
of the Model in Parameter Estimation.
3. IFAC-Symp., Den Haag 1973, Beitrag TS-1,
S.917-920

- /48/ Van den Boom, A.J.W.
Van den Enden, A.W.M.
The Determination of the Order of Process-
and Noise Dynamics.
3. IFAC-Symp., Den Haag 1973, TS-2, S.929-938
- /49/ Chan, C.W.
Harris, C.J.
Wellstead, P.E.
An Order-Testing Criterion for Mixed Auto-
regressive Moving Average Processes.
Int. J. Contr., 20(1974)5, S. 817-834
- /50/ Leonhard, W.
Statistische Analyse linearer Regelsysteme.
Teubner Verlag, Stuttgart, 1973
- /51/ Schulze, H.
Anwendung von Schätzverfahren für Kenngrößen
von Regelstrecken aufgrund von Messungen
im geschlossenen Regelkreis.
Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung,
19(1971)3, S. 113-119
- /52/ Ljung, L.
Gustavsson, I.
Söderström, T.
Identification of Linear Multivariable Systems
Operating Under Linear Feedback Control.
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6,
S. 836-840
- /53/ Phadke, M.S.
Wu, S.M.
Identification of Multiinput-Multioutput
Transfer Function and Noise Model of a Blast
Furnace from Closed-Loop Data.
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6,
S. 944-951
- /54/ Graupe, D.
On Identification Stochastic Closed-Loop Systems
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-20(1975)4,
S. 553-555
- /55/ Thöm, H.
Krebs, V.
Identifizierung im geschlossenen Regelkreis-
Korrelationsanalyse oder Parameterschätzung?
Regelungstechnik, 1(1975), S. 17-19
- /56/ Rödder, P.
Systemanalyse im geschlossenen Regelkreis
mit regellosen Signalen.
Messen, Steuern, Regeln, 18(1975)4, S.138-142

- /57/ Wellstead, P.E.
Edmunds, J.M. Least-Squares Identification of Closed-Loop Systems.
Int. J. Contr., 21(1975)4, S. 689-699
- /58/ EB, J. Identifikation multivariabler diskreter Systeme aus gemessenen Eingangs- und Ausgangssignalen nach der verallgemeinerten Methode der kleinsten Fehlerquadrate.
VDI/AFCET-Aussprachetag "Industrielle Anwendung adaptiver Systeme", 1973, S. 237-262
- /59/ Chan, Y.T. Parameter Estimation of Linear Multivariable Plants Using the Instrumental Variable Method.
3. IFAC-Symp., Den Haag 1973, PV-6, S.513-516
- /60/ Giudorzi, R.P. Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems.
3. IFAC-Symp., Den Haag 1973, TS-4, S.943-952
- /61/ Kashyap, R.L.
Nasburg, R.E. Parameter Estimation in Multivariate Stochastic Difference Equations.
IEEE Trans. Aut. Contr., AC-19(1974)6, S. 784-797
- /62/ Scheurer, H.G. Ein adaptives, explizites Parameterschätzverfahren mit geringem Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf.
Regelungstechnik, 12(1975), S. 427-433

A: Anhang

=====

A.1 : Beschreibung des Korrelationsverfahrens (KOR) /11/,/12/

Ausgehend von der LS-Systembeschreibung im Zeitbereich

$$x(k) = - \sum_{i=1}^n a_i x(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) \quad (\text{A.1.1})$$

werden beim KOR-Verfahren anstelle des Eingangssignals $u(k)$ dessen Autokorrelationsfunktion $\phi_{uu}(k)$ und statt $x(k)$ die Kreuzkorrelationsfunktion $\phi_{ux}(k)$ eingesetzt:

$$\phi_{ux}(k) = - \sum_{i=1}^n a_i \phi_{ux}(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i \phi_{uu}(k-i) \quad (\text{A.1.2})$$

Die Korrelationsfunktionen sind wie folgt definiert:

$$\phi_{uu}(k) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} u(j) u(j+k) \quad (\text{A.1.3})$$

$$\phi_{ux}(k) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} u(j) x(j+k) \quad (\text{A.1.4})$$

wobei L die um die maximale Verschiebung M verminderte Anzahl der Meßwerte $\{u(k), y(k)\}$ ist. Berücksichtigt man die Meßgleichung

$$y(k) = x(k) + r(k) \quad (\text{A.1.5})$$

dann gilt auch:

$$\phi_{uy}(k) = \phi_{ux}(k) + \phi_{ur}(k) \quad (\text{A.1.6})$$

Mit Gl. (A.1.2) ergibt sich folgende Ein-, Ausgangsbeschreibung:

$$\phi_{uy}(k) = - \sum_{i=1}^n a_i \phi_{uy}(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i \phi_{uu}(k-i) + e(k) \quad (\text{A.1.7})$$

$$\text{und} \quad e(k) = \phi_{ur}(k) + \sum_{i=1}^n a_i \phi_{ur}(k-i) + e^*(k) \quad . \quad (\text{A.1.8})$$

In der entsprechenden z-transformierten Form ist

$$A(z^{-1})\phi_{uy}(z) = B(z^{-1})\phi_{uu}(z) + E(z) \quad (\text{A.1.9})$$

$$\text{mit} \quad E(z) = A(z^{-1})\phi_{ur}(z) + E^*(z) \quad . \quad (\text{A.1.10})$$

Über das Störmodell, Gl. (A.1.8) oder Gl. (A.1.10), wird das korrelierte Fehlersignal $e(k)$ auf weißes Rauschen $e^*(k)$ zurückgeführt. Da aber nach Voraussetzung die statistischen Eigenschaften des Störsignals unbekannt sind, kann auch $\phi_{ur}(k)$ nicht ermittelt werden. Setzt man jedoch statistische Unabhängigkeit von u und r und stationäre Signale voraus, dann erhält man

$$\text{mit} \quad E\{u(k)\} \cong \bar{u} \quad (\text{A.1.11})$$

$$E\{r(k)\} = K \quad (\text{A.1.12})$$

$$\text{auch} \quad \phi_{ur}(k) \cong K \bar{u} = K \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} u(j) \quad , \quad (\text{A.1.13})$$

$$\text{und mit} \quad K_1 = (1 - \sum_{i=1}^n a_i) K \quad (\text{A.1.14})$$

folgt aus Gl. (A.1.8) und Gl. (A.1.7):

$$e(k) = K_1 \bar{u} + e^*(k) \quad (\text{A.1.15})$$

$$e^*(k) = \phi_{uy}(k) + \sum_{i=1}^n a_i \phi_{uy}(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i \phi_{uu}(k-i) - K_1 \bar{u} \quad . \quad (\text{A.1.16})$$

Bei jedem Rekursionsschritt k ist Gl. (A.1.16) für das gesamte Verschiebeintervall anzuschreiben, d.h. für $k^* = 0, 1, 2, \dots, M$. Dann ergibt sich folgende allgemeine Schätzgleichung :

$$\boxed{\bar{e}^* = \bar{\phi}_{uy} - \sum p} \quad (\text{A.1.17})$$

$$\text{mit } \underline{e}^* = [e^*(n), e^*(n+1), \dots, e^*(n+M)]^T \quad (\text{A.1.18})$$

$$\underline{p} = [a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; K_1]^T \quad (\text{A.1.19})$$

$$\underline{\phi}_{uy} = [\phi_{uy}(n), \phi_{uy}(n+1), \dots, \phi_{uy}(n+M)]^T \quad (\text{A.1.20})$$

$$\underline{x} = [\underline{\phi}_{uy}(n-1), \dots, \underline{\phi}_{uy}(0); \underline{\phi}_{uu}(n-1), \dots, \underline{\phi}_{uu}(0); \underline{u}] \quad (\text{A.1.21})$$

und den Abkürzungen:

$$\underline{\phi}_{uy}(j) = [\phi_{uy}(j), \phi_{uy}(j+1), \dots, \phi_{uy}(j+M)]^T \quad (\text{A.1.22})$$

$$\underline{\phi}_{uu}(j) = [\phi_{uu}(j), \phi_{uu}(j+1), \dots, \phi_{uu}(j+M)]^T \quad (\text{A.1.23})$$

$$\underline{u} = [\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}]^T. \quad (\text{A.1.24})$$

Die Minimierung nach dem LS-Kriterium

$$\|\underline{e}^*\| \xrightarrow{\hat{c}} \text{Min} \quad (\text{A.1.25})$$

erfolgt zweckmäßigerweise mittels Orthogonaltransformation nach dem pseudo-rekursiven Householder-Verfahren gemäß

$$\underline{x}^T \underline{X} \hat{\underline{p}} = \underline{x}^T \underline{\phi}_{uy}, \quad (\text{A.1.26})$$

da bei jedem Rekursionsschritt nicht 1 Zeile wie beim LS-Verfahren, sondern M Zeilen zu reduzieren sind, wobei das Verschiebungsintervall M so zu wählen ist, daß der wesentliche Teil der Gewichtsfunktion erfaßt wird. Die Bildung der Korrelationsfunktionen $\phi_{uu}(k)$, $\phi_{uy}(k)$ nach Gl. (A.1.3) und Gl. (A.1.4), die eine Filterung von Ein- und Ausgangssignal darstellt, läßt sich vereinfachend in rekursiver Form durchführen.

A.2 : Beweis der Sätze 3.1 - 3.5 /26/

Bezeichnet E^q mit $q > 0$ den q -dimensionalen, linearen Vektorraum, dann sei der Definitionsbereich B der $(m \times n)$ -Matrix $\underline{A}$ gegeben durch

$$B(\underline{A}) = \{ \underline{y} \in E^m \mid \underline{y} = \underline{A} \underline{x}, \quad \underline{x} \in E^n \} \quad (\text{A.2.1})$$

Satz 3.1: $\underline{A}$ sei eine $(m \times n)$ -Matrix vom Rang r und $\underline{H}$ sei eine $(n \times q)$ -Matrix mit der Eigenschaft $\underline{H}^T \underline{H} = \underline{I}_q$. Gilt für den Definitionsbereich von $\underline{H}$:

$$B(\underline{H}) \subseteq B(\underline{A}^T) , \quad (\text{A.2.2})$$

dann ist:

$$\text{cond}(\underline{A} \underline{H}) \leq \text{cond}(\underline{A}) . \quad (\text{A.2.3})$$

Beweis: Für $\underline{A} \underline{H} = \underline{0}$ ist die Ungleichung (A.2.3) sicher erfüllt. Für $\underline{A} \underline{H} > \underline{0}$ seien die q singulären Werte von $\underline{A} \underline{H}$:

$$\bar{s}_1 \geq \bar{s}_2 \geq \dots \geq \bar{s}_q . \quad (\text{A.2.4})$$

Für den größten singulären Wert $\bar{s}_1$ gilt:

$$\bar{s}_1 = \| \underline{A} \underline{H} \| \leq \| \underline{A} \| \quad \| \underline{H} \| = \| \underline{A} \| = s_1 \quad (\text{A.2.5})$$

$$\text{oder} \quad \bar{s}_1 \leq s_1 . \quad (\text{A.2.6})$$

Nach Gl. (2.4.9) und Gl. (2.4.15) ist s_1 wie folgt definiert, wenn immer $\underline{x} \neq \underline{0}$ vorausgesetzt wird:

$$s_1(\underline{A}) = \text{lub}(\underline{A}) = \max_{\underline{x}} \frac{\| \underline{A} \underline{x} \|}{\| \underline{x} \|} = \max_{\| \underline{x} \| = 1} \| \underline{A} \underline{x} \| . \quad (\text{A.2.7})$$

Entsprechend gilt für den kleinsten, von Null verschiedenen, singulären Wert s_r von $\underline{A}$ bei

$$\underline{H} \underline{y} = \underline{x} \quad (\text{A.2.8})$$

$$\begin{aligned} s_r &= \min_{\underline{x} \in B(\underline{A}^T)} \frac{\|\underline{A} \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \min_{\underline{x} \in B(\underline{H})} \frac{\|\underline{A} \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \\ &= \min_{\underline{H} \underline{y}} \frac{\|\underline{A} \underline{H} \underline{y}\|}{\|\underline{H} \underline{y}\|} = \bar{s}_q. \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

$$\text{Daher ist} \quad s_r \leq \bar{s}_q \quad (\text{A.2.10})$$

und mit Gl. (A.2.6) folgt weiter:

$$\text{cond}(\underline{A} \underline{H}) = (\bar{s}_1 / \bar{s}_q) \leq (s_1 / s_q) = \text{cond}(\underline{A}) \quad (\text{A.2.11})$$

Die Bedingung A.2.2 ist sicher dann erfüllt, wenn $r = \text{Rang}(\underline{A}) = n$ ist, da in diesem Falle $B(\underline{A}^T) = E^n$ ist.

Die Sätze 3.2 und 3.3 ergeben sich direkt aus Satz 3.1 als Sonderfälle.

Satz 3.4: Wenn $K_0 = s_r^{-1} \|\Delta \underline{A}\| < 1$, dann gilt mit

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{A} + \Delta \underline{A} : \quad (\text{A.2.12})$$

$$\text{Rang}(\underline{A} + \Delta \underline{A}) \geq \text{Rang}(\underline{A}) \quad (\text{A.2.13})$$

Beweis: Es sei $r = \text{Rang}(\underline{A}) > 0$ und $\underline{A}$ gemäß Gl. (3.1.7) zerlegt:

$$\underline{A} = \underline{U} \underline{S} \underline{V}^T \quad (\text{A.2.14})$$

$$\text{oder} \quad \underline{S} = \underline{U}^T \underline{A} \underline{V} \quad (\text{A.2.15})$$

Aus Gl. (A.2.15) wird mit $\tilde{\underline{A}}$:

$$\underline{U}^T (\underline{A} + \Delta \underline{A}) \underline{V} = \underline{S} + \underline{U}^T \Delta \underline{A} \underline{V} = \underline{S} (\underline{I}_{[r]} + \underline{P}) \quad , \quad (\text{A.2.16})$$

wobei
$$\underline{P} = \underline{S}^{-1} \underline{U}^T \Delta \underline{A} \underline{V} \quad .$$

Mit Gl. (3.1.4) gilt weiter:

$$\|\underline{P}\| \leq \|\underline{S}^{-1}\| \|\Delta \underline{A}\| = K_{\delta} < 1 \quad . \quad (\text{A.2.17})$$

Da $K_{\delta} < 1$, ist auch $[\underline{I}_{[r]} + \underline{P}]$ nichtsingulär, d.h. vom Rang r . Jeder der 3 Matrixfaktoren auf der linken Seite von Gl. (A.2.16) muß daher zumindest vom Rang r sein, womit sich für $\underline{A}$ die Ungleichung (A.2.13) ergibt.

Satz 3.5: Es sei $\tilde{\underline{A}} = \underline{A} + \Delta \underline{A}$ und $K_{\delta} < 1$. Ist weiterhin

$$\text{Rang}(\tilde{\underline{A}}) > \text{Rang}(\underline{A}) \quad , \quad (\text{A.2.18})$$

dann gilt
$$K_{\delta}(\tilde{\underline{A}}) \geq (1/\delta) - 1 \quad . \quad (\text{A.2.19})$$

Beweis: Gilt nach Satz 3.4:

$$\text{Rang}(\tilde{\underline{A}}) > \text{Rang}(\tilde{\underline{A}} - \Delta \underline{A}) \quad , \quad (\text{A.2.20})$$

dann ist mit

$$\varepsilon_K(\tilde{\underline{A}}) > \|\Delta \underline{A}\| \quad (\text{A.2.21})$$

$$\text{cond}(\tilde{\underline{A}}) = \frac{s_1(\tilde{\underline{A}})}{s_r(\tilde{\underline{A}})} \geq \frac{\|\tilde{\underline{A}}\|}{\|\Delta \underline{A}\|} \quad (\text{A.2.22})$$

$$\text{cond}(\tilde{\underline{A}}) \geq \frac{\|\tilde{\underline{A}}\|}{\|\Delta \underline{A}\|} \geq \frac{\|\underline{A}\| - \|\Delta \underline{A}\|}{\|\Delta \underline{A}\|} = (1/\delta) - 1 \quad (\text{A.2.23})$$

q.e.d.

A.3 : Bekannte Verfahren zur Konditionsverbesserung

A.3.1 : Stochastische Erweiterung der Schatzgleichung /46/

Die Erweiterung und Formulierung des schlecht konditionierten Systems

$$\underline{A}_{[m \times n]} \underline{x}_{[n \times 1]} = \underline{b}_{[m \times 1]} \quad (\text{A.3.1})$$

als stochastisches Problem berücksichtigt die Tatsache, daß in der Praxis $\underline{b}$ nicht exakt vorliegt, sondern lediglich $\underline{g} = \underline{b} + \underline{r}$, wobei $\underline{r}$ zufällige Meßfehler und/oder numerische Rundungsfehler beschreibt. Damit wird aus Gl.

(A.3.1):

$$\underline{A} \underline{x} + \underline{r} = \underline{g} \quad (\text{A.3.2})$$

Gl. (A.3.2) beschreibt ein System von Stichproben, die aus den zufälligen Prozessen P_1 , P_2 und P_3 gewonnen werden. Gl. (A.3.2) kann man sich daher aus dem entsprechenden stochastischen System

$$\underline{A} \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{u}_3 \quad (\text{A.3.3})$$

entnommen denken, wobei $\underline{A} \underline{u}_1$ den "Signalprozeß", $\underline{u}_2$ den "Störprozeß" und $\underline{u}_3$ den "Datenprozeß" bezeichnet. Vereinfacht sei:

$$E \{ \underline{u}_1 \} = E \{ \underline{u}_2 \} = \underline{0} \quad (\text{A.3.4})$$

Als Maß für die Varianz der stochastischen Prozesse dienen folgende Korrelations- oder Kovarianzmatrizen:

$$E \{ \underline{u}_i \underline{u}_j^T \} = \underline{R}_{ij} \quad (\text{A.3.5})$$

Mit Gl. (A.3.5) lassen sich die Autokorrelationsmatrizen $\underline{R}_{11}$, $\underline{R}_{22}$ und die Kreuzkorrelationen $\underline{R}_{12}$, $\underline{R}_{21}$ angeben. Die Matrix $\underline{R}_{33}$ ist mit Hilfe von

Gl. (A.3.3) bestimmbar:

$$\begin{aligned} \underline{R}_{33} &= E \{ \underline{u}_3 \underline{u}_3^T \} = E \{ (A \underline{u}_1 + \underline{u}_2)(A \underline{u}_1 + \underline{u}_2)^T \} \\ \underline{R}_{33} &= A \underline{R}_{11} A^T + A \underline{R}_{12} + \underline{R}_{21} A^T + \underline{R}_{22} \end{aligned} \quad (A.3.6)$$

Sind Signal- und Störprozesse statistisch unabhängig, dann wird mit

$$\underline{R}_{12} = \underline{R}_{21} = \underline{0} :$$

$$\underline{R}_{33} = A \underline{R}_{11} A^T + \underline{R}_{22} \quad (A.3.7)$$

Wird vorausgesetzt, daß $\underline{R}_{33}$ positiv definit ist, dann ist $\underline{R}_{33}$ invertierbar.

Wir suchen nun nach der besten linearen Schätzung des Signals $\underline{u}_1$ über eine lineare Transformation der Daten $\underline{L} \underline{u}_3$. Hinsichtlich eines Vektors $\underline{a}_1$ läßt sich die Güte der Schätzung von $\underline{u}_1$ über $\underline{L} \underline{u}_3$ mit Hilfe des mittleren quadratischen Erwartungswertes $E \{ | \underline{u}_1^T \underline{a}_1 - (\underline{L} \underline{u}_3)^T \underline{a}_1 |^2 \}$ ausdrücken. Es sei

$$(\underline{L} \underline{u}_3)^T \underline{a}_1 = \underline{u}_3^T \underline{a}_2 \quad (A.3.8)$$

mit $\underline{a}_2 = \underline{L}^T \underline{a}_1$.

Dann wird ein Vektor $\underline{a}_2$ gesucht, der diesen Erwartungswert minimiert:

$$E \{ | \underline{u}_1^T \underline{a}_1 - \underline{u}_3^T \underline{a}_2 |^2 \} \rightarrow \min \quad (A.3.9)$$

Weiterhin gilt:

$$E \{ | \underline{u}_1^T \underline{a}_1 - \underline{u}_3^T \underline{a}_2 |^2 \} = E \{ (\underline{a}_1^T \underline{u}_1 - \underline{a}_2^T \underline{u}_3)(\underline{u}_1^T \underline{a}_1 - \underline{u}_3^T \underline{a}_2) \} \quad (A.3.10)$$

oder

$$\begin{aligned} E \{ | \underline{u}_1^T \underline{a}_1 - \underline{u}_3^T \underline{a}_2 |^2 \} &= \underline{a}_1^T \underline{R}_{11} \underline{a}_1 - \underline{a}_1^T \underline{R}_{31} \underline{a}_2 - \underline{a}_2^T \underline{R}_{31} \underline{a}_1 + \underline{a}_2^T \underline{R}_{33} \underline{a}_2 \\ &= (\underline{a}_2 - \underline{R}_{33}^{-1} \underline{R}_{31} \underline{a}_1)^T \underline{R}_{33} (\underline{a}_2 - \underline{R}_{33}^{-1} \underline{R}_{31} \underline{a}_1) \\ &\quad + \underline{a}_1^T (\underline{R}_{11} - \underline{R}_{31}^T \underline{R}_{33}^{-1} \underline{R}_{31}) \underline{a}_1 . \end{aligned} \quad (\text{A.3.11})$$

Ist $\underline{R}_{33}$ positiv definit, wird Gl. (A.3.11) durch $\underline{a}_2$ dann und nur dann minimiert, wenn

$$\underline{a}_2 = \underline{R}_{33}^{-1} \underline{R}_{31} \underline{a}_1 . \quad (\text{A.3.12})$$

Mit Gl. (A.3.8) folgt weiter für symmetrische Matrizen $\underline{R}_{31}$, $\underline{R}_{33}$:

$$\underline{L} = (\underline{R}_{33}^{-1} \underline{R}_{31})^T = \underline{R}_{31} \underline{R}_{33}^{-1} . \quad (\text{A.3.13})$$

Da $\underline{L}$ unabhängig von $\underline{a}_1$ ist, läßt sich die beste lineare Schätzung für $\underline{u}_1$ sofort angeben:

$$\hat{\underline{u}}_1 = \underline{R}_{12} \underline{R}_{33}^{-1} \underline{u}_3 . \quad (\text{A.3.14})$$

Mit den ursprünglichen Bezeichnungen von Gl. (A.3.2) gilt auch:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{R}_{13} \underline{R}_{33}^{-1} \underline{g} , \quad (\text{A.3.15})$$

wobei $\underline{R}_{33}$ positiv definit ist.

Nach Gl. (A.3.3) und Gl. (A.3.5) ist:

$$\underline{R}_{13} = E \{ \underline{u}_1 \underline{u}_3^T \} = E \{ \underline{u}_1 (\underline{u}_1^T \underline{A}^T + \underline{u}_2^T) \} = \underline{R}_{11} \underline{A}^T + \underline{R}_{12} \quad (\text{A.3.16})$$

und mit der Definition von $\underline{R}_{33}$ nach Gl. (A.3.6) wird schließlich:

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{R}_{11} \underline{A}^T + \underline{R}_{12}) (\underline{A} \underline{R}_{11} \underline{A}^T + \underline{A} \underline{R}_{12} + \underline{R}_{12}^T \underline{A}^T + \underline{R}_{22})^{-1} \underline{g} . \quad (\text{A.3.17})$$

Sind Signal- und Störprozeß statistisch unabhängig, dann erhalten wir als beste lineare Schätzung folgende stochastisch erweiterte Form:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{R}_{11} \underline{A}^T (\underline{A} \underline{R}_{11} \underline{A}^T + \underline{R}_{22})^{-1} \underline{g} . \quad (\text{A.3.18})$$

Im Sonderfall verschwindender Störungen ergibt sich mit

$$\underline{R}_{22} = 0 \quad \text{die Lösung} \quad \hat{\underline{x}} = \underline{A}^{-1} \underline{g} .$$

Die Lösung von Gl. (A.3.17) oder Gl. (A.3.18) wird zweckmäßigerweise in 2 Schritten durchgeführt. Aus Gl. (A.3.18) beispielsweise folgt:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{R}_{11} \underline{A}^T \hat{\underline{y}} \quad (\text{A.3.19})$$

mit
$$\hat{\underline{y}} = (\underline{A} \underline{R}_{11} \underline{A}^T + \underline{R}_{22})^{-1} \underline{g} . \quad (\text{A.3.20})$$

Die Hilfslösung $\hat{\underline{y}}$ ergibt sich dann durch Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$[\underline{A} \underline{R}_{11} \underline{A}^T + \underline{R}_{22}] \hat{\underline{y}} = \underline{g} \quad (\text{A.3.21})$$

oder
$$\underline{A}^* [\text{mxm}] \underline{y} [\text{mx1}] = \underline{g} [\text{mx1}] \quad (\text{A.3.22})$$

mit
$$\underline{A}^* [\text{mxm}] = \underline{A} \underline{R}_{11} \underline{A}^T + \underline{R}_{22} = \underline{R}_{33} . \quad (\text{A.3.23})$$

Die Kondition des stochastisch erweiterten Schätzverfahrens wird demnach durch die Kondition der mxm-Matrix $\underline{A}^*$ festgelegt, wobei die additiv einwirkende Kovarianz- oder Korrelationsmatrix $\underline{R}_{22}$ zur "Rangstabilisierung" beiträgt. $\underline{R}_{22}$ bestimmt daher die "Güte" der Hilfslösung $\hat{\underline{y}}$ und somit auch die der Lösung $\hat{\underline{x}}$, während die Matrix $\underline{R}_{11}$ die absolute Größe der Hilfslösung $\hat{\underline{y}}$ beeinflusst. Nach Franklin /46/ wird die Matrix $\underline{R}_{22}$ so gewählt, daß sich die Diagonalelemente von $\underline{A} \underline{R}_{11} \underline{A}^T$ um den Faktor 10^{-2d} erhöhen, mit

$$2d < t , \quad (\text{A.3.24})$$

wenn angenommen wird, daß die Gleitkommaarithmetik des Digitalrechners durch t signifikante Stellen festgelegt ist. In der Praxis wird man $d = 2$ oder $d = 3$ wählen. Damit ergibt sich die Matrix $\underline{A}^* = \underline{R}_{33}$ aus der Matrix $\underline{A} \underline{R}_{11} \underline{A}^T$ durch Multiplikation jedes Diagonalelementes mit dem Faktor $(1 + 10^{-2d})$, während die Nichtdiagonalelemente unverändert bleiben.

In /46/ wird weiter gezeigt, daß die durch diese stochastische Erweiterung erzielbare Verbesserung der numerischen Lösung $\underline{x}$ auch bei sehr fehlerhaften statistischen Annahmen in $\underline{R}_{11}$, $\underline{R}_{22}$ erhalten bleibt.

A.3.2 : Modifikation der Schätzgleichung /18/1/45/

Wir gehen von einer schlecht konditionierten, quadratischen Matrix $\underline{A}$ in folgender allgemeinen Form aus:

$$\underline{A}_{[n \times n]} \underline{x}_{[n \times 1]} = \underline{b}_{[n \times 1]} \quad (A.3.25)$$

Wir nehmen an, daß wir durch eine geeignete Modifikation dieser Matrix $\underline{A}$ eine benachbarte Matrix $\underline{B}$ erhalten haben, die eine gegenüber $\underline{A}$ verbesserte Kondition aufweist:

$$\underline{B} = \underline{A} + \Delta \underline{A} = \underline{A} + \underline{u} \underline{v}^T \quad (A.3.26)$$

$$\text{mit} \quad \Delta \underline{A}_{[n \times n]} = \underline{u}_{[n \times 1]} \underline{v}_{[1 \times n]}^T \quad (A.3.27)$$

$$\text{und} \quad \text{cond}(\underline{A}^*) > \text{cond}(\underline{A}) \quad (A.3.28)$$

Die Modifizierung der Matrix $\underline{A}$ geschieht dabei in der durch Gl. (A.3.27) vorgeschriebenen Form mit zunächst beliebigen Vektoren $\underline{u}, \underline{v}$.

Es sei nun $\underline{y}$ die Lösung des benachbarten, besser konditionierten Systems:

$$\underline{B}_{[n \times n]} \underline{y}_{[n \times 1]} = \underline{b}_{[n \times 1]} \quad (A.3.29)$$

$$\text{oder} \quad \underline{y} = \underline{B}^{-1} \underline{b} . \quad (\text{A.3.30})$$

Die Lösung des ursprünglichen Systems, Gl. (A.3.25), ist dann mit Gl.

(A.3.26):

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b} = [\underline{B} - \underline{u}\underline{v}^T]^{-1} \underline{b} . \quad (\text{A.3.31})$$

Die Inversion von Matrix-Ausdrücken kann allgemein wie folgt aufgespalten werden (Matrix-Inversions-Lemma) /10/:

$$[\underline{A} + \underline{B} \underline{C}^T]^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{B} [\underline{I} + \underline{C}^T \underline{A}^{-1} \underline{B}]^{-1} \underline{C}^T \underline{A}^{-1} . \quad (\text{A.3.32})$$

Wenden wir diesen Satz auf Gl. (A.3.31) an, dann ergibt sich:

$$\underline{x} = \underline{B}^{-1} \underline{b} + \frac{\underline{B}^{-1} \underline{u}\underline{v}^T \underline{B}^{-1} \underline{b}}{1 - \underline{v}^T \underline{B}^{-1} \underline{u}} \quad (\text{A.3.33})$$

und weiter mit Gl. (A.3.30):

$$\underline{x} = \underline{y} + \frac{\underline{B}^{-1} \underline{u}\underline{v}^T \underline{y}}{1 - \underline{v}^T \underline{B}^{-1} \underline{u}} . \quad (\text{A.3.34})$$

Ist nun $\underline{z}$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\underline{B} \underline{z} = \underline{u} \quad (\text{A.3.35})$$

oder

$$\underline{z} = \underline{B}^{-1} \underline{u} , \quad (\text{A.3.36})$$

wobei der Vektor $\underline{u}$ lediglich eine neue rechte Seite für das schon gelöste System

$$\underline{B} \underline{y} = \underline{b}$$

darstellt, dann erhalten wir mit $\underline{y} = \underline{B}^{-1} \underline{b}$ die exakte Lösung $\underline{x}$:

$$\underline{x} = \underline{y} + \frac{\underline{v}^T \underline{y}}{1 - \underline{v}^T \underline{z}} \underline{z} = \underline{y} + \Delta \underline{y} \quad (\text{A.3.37})$$

mit

$$\Delta \underline{y} = \frac{\underline{v}^T \underline{y}}{1 - \underline{v}^T \underline{z}} \underline{z} . \quad (\text{A.3.38})$$

Der gesuchte Lösungsvektor $\underline{x}$ eines schlecht konditionierten Systems wird demnach aus der Lösung $\underline{y}$ eines benachbarten Systems mit verbesserter Kondition und einer einfach zu bestimmenden Korrektur $\Delta \underline{y}$ gewonnen.

Aus Gl. (A.3.37) lassen sich einige Sonderfälle wie Zeilen- oder Spaltenmodifikation ableiten. Von Interesse ist hier nur die Modifikation mit dem geringsten numerischen Aufwand, die sich durch die Änderung eines einzigen Elementes a_{ij} der Matrix $\underline{A}$, in Form einer Addition von a_{ij} mit dem Zahlenwert c , ergibt. Aus Gl. (A.3.37) folgt dann mit

$$\underline{u} = \underline{e}_i , \quad \underline{v}^T = c \underline{e}_j^T , \quad (\text{A.3.39})$$

$$\underline{x} = \underline{y} + \frac{c y_j}{1 - c z_j} \underline{z} = \underline{y} + \Delta \underline{y} . \quad (\text{A.3.40})$$

Dabei ist der Korrekturvektor $\Delta \underline{y}$:

$$\Delta \underline{y} = \frac{c y_j}{1 - c z_j} \underline{z} , \quad (\text{A.3.41})$$

wobei $\underline{z}$ die Lösung von $\underline{A}^* \underline{z} = \underline{e}_i$ ist und y_j, z_j die j -ten Komponenten der Vektoren $\underline{y}, \underline{z}$ darstellen.

Bei der Wahl der Modifikationsvektoren $\underline{u}, \underline{v}^T$ hat man große Freiheiten, wobei zu beachten ist, daß die Zahlenwerte der einzelnen Elemente in der Zusatzma-

trix $\underline{A} = \underline{uv}^T$ relativ klein bleiben, um die Stabilität des benachbarten Systems $\underline{B} = \underline{A} + \Delta \underline{A}$ sicherzustellen. Im allgemeinen wird man sich aber darauf beschränken, die Elemente der Hauptdiagonalen von $\underline{A}$ stärker zu bewerten.

A.4 : FORTRAN-IV-Unterprogramme

```

      SUBROUTINE IVIPR (L,LM,ZH,RHOS,RHOR,N,NU,NUPT,NPAR,NPPI,NMAX,
1 YH,A,AH,UV,YV,YHV,YL,YHU,XZ,YZ,THAT,ROW)
C-----UP MIT DEM INDIKENTEN PSEUDOREKURSIVEN IVA-VERFAHREN
C      L = LAUFVARIABLE
C      UM,ZH = MEßWERTE
C      RHOS = BEWERTUNGSFAKTOR FUER ZEITV. PARAMETER (RHOS = 1)
C      RHOR = GEWICHTSFAKTOR (KONVERGENZFAKTOR)
C      YH = HILFSVARIABLE
C      A = MODELL-PARAMETERVEKTOR
C      NPAR = ANZAHL DER MODELLPARAMETER, NPAR = N*NU, NPPI = NPAR+1
C      N,NU = ZAHL DER A- BZW. S-PARAMETER
C      NUPT = NU + TOTZEIT IN ABTASTSCHRITTEN
C
      DIMENSION A(NPAR),AH(NPAR),UV(NUPT),YV(NUPT),YHV(NUPT)
      DIMENSION YH(NPAR),YHU(NPAR),XZ(NMAX,NPAR),YZ(NPAR)
      DIMENSION THAT(NMAX,NPPI),ROW(NPPI)
C
      DATA GAMMA,NLS/0.05,10/
C
      IF (L.GT.1)      GOTO 10
C
      NSPR = NU-N
      NTOTZ = NUPT-NU
      NP1 = N+1
      N10 = 10*N
      NPT = N+NTOTZ
      LMIN = NP1+NPPI+NTOTZ
      NUN = NLS*N
C
C-----ANFANGSWERTE-----
C
      CALL NULMAT (XZ,NMAX,NPAR,NPAR)
      CALL NULMAT (YZ,NPAR,NPAR,1)
      CALL NULMAT (THAT,NMAX,NPPI,NPPI)
      CALL NULMAT (UV,NUPT,NPT,1)
      CALL NULMAT (YV,N,N,1)
      CALL NULMAT (YU,NPAR,NPAR,1)
      CALL NULMAT (YHU,NPAR,NPAR,1)
      CALL NULMAT (A,NPAR,NPAR,1)
      CALL NULMAT (AH,NPAR,NPAR,1)
      CALL NULMAT (YHV,N,N,1)
C
10  CONTINUE
      IF (NSPR.EQ.0)      GOTO 11
      UV(1) = UM
C
11  CONTINUE
      DO 12      I=1,N
          YHU(I) = -YHV(I)
12  YL(I) = -YV(I)
      DO 13      I=1,NPPI
          NP1 = N+I
          J = I+NTOTZ
          YHU(NP1) = UV(J)
13  YL(NP1) = UV(J)
C

```

```

C-----HILFSMODELL-----
C
      DO 30      I=1,NPAR
      A(I) = (1.-GAMMA)*A(I) + GAMMA*A(I)
30 CONTINUE

C
      YI = ZI
      IF (L,LT,NUM)      GOTO 14

C
      YI = 0.
      DO 31      I=1,NPAR
31 YI = YI + A(I)*VPI(I)

C
      14 CONTINUE

C-----SCHAEZALGORITHMUS-----
C
      IF (L,LE,NPT)      GOTO 25
      RHO = RHOS
      CALL SAMMAB (YI,YU,ZI,RHO,NMAX,NPAR,XZ,YZ)

C
      IF (L,GE,NUM)      GOTO 18
      DO 17      I=1,NPAR
17 RW(I) = YU(I)
      RW(NPPI) = -ZI
      GOTO 20

C
      18 CONTINUE
      J2 = J2+1
      IF (J2,GT,NPAR)      J2 = J2-NPAR
      DO 19      I=1,NPAR
19 RW(I) = XZ(J2,I)
      RW(NPPI) = -YZ(J2)

C
      20 CONTINUE
      RHO = RHOR
      IF (L,LT,NUM)      RHO = 1.
      CALL REDUC (NMAX,NPPI,THAT,RW,RHO)

C
      IF (L,LE,LTH)      GOTO 25
      CALL REDUC2 (NMAX,NPPI,NPAR,THAT,A,QHIL)

C
C-----USPEICHERUNG-----
C
      25 CONTINUE
      CALL ALREV (YI,YV,NPT)
      CALL ALREV (ZI,YV,N)
      CALL ALREV (YI,YV,N)
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE ALMEV (X,XV,N)
C   UP ZUR ABSPEICHERUNG DES MESSWERTES X IN DEN VEKTOR XV DER
C   LETZTEN N MESSWERTE.
C   DER NEUESTE WERT STEHT AN 1. STELLE
C   X = NEUER MESSWERT
C   XV = VEKTOR DER LETZTEN N MESSWERTE

```

```

DIMENSION XV(N)

```

```

NM1 = N-1
DO 10 I=1,NM1
  NM1 = N-I
  XV(NM1+1) = XV(NM1)
10 CONTINUE
  XV(1) = X

```

```

RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SAMMAB (A,B,Z,RHO,NMAX,N,X,Y)
C   UP ZUM SAMMELN UND REKURSIVEN AUFBAU VON BEWERTETEN
C   MATRIZEELEMENTEN GEMAEISS  $X = A^T \cdot B$  UND  $Y = A^T \cdot Z$ 
C   X UND Y MUESSEN VOR DEM ERSTEN AUFRUF DEFINIERT SEIN

```

```

DIMENSION A(N),B(N),X(NMAX,N),Y(N)

```

```

IF (RHO.EQ.1.) GOTO 13

```

```

DO 10 I=1,N
  DO 11 J=1,N
    X(I,J) = X(I,J)*RHO + A(I)*B(J)
11 CONTINUE
    Y(I) = Y(I)*RHO + A(I)*Z
10 CONTINUE
  RETURN
13 CONTINUE
  DO 14 I=1,N
    DO 15 J=1,N
      X(I,J) = X(I,J) + A(I)*B(J)
      Y(I) = Y(I) + A(I)*Z
15 CONTINUE
14 CONTINUE
  RETURN
END

```

```

      SUBROUTINE NULLMAT (A,NMAX,M)
C-----UNTERPROGRAMM ZUR ERZEUGUNG DER NULLMATRIX
C-----VARIABLE DIMENSIONIERUNG
      DIMENSION A(NMAX,M)
      DO 4 I = 1,M
      DO 5 J = 1,N
5 A(I,J) = 0.
4 CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

      SUBROUTINE REDUC (ZMAT,THAT,MHAX,NMAX,NP1,M)
C-----UP ZUR REDUKTION DER MATRIX ZMAT MITTELS ORTH. HOUSEH.-TRANSF.

      DIMENSION ZMAT(MHAX,NP1),THAT(NMAX,NP1)

      DO 10 J=1,NP1
      TMJ = THAT(J,J)
      SUM = TMJ*TMJ
      DO 11 I=1,N
11 SUM = SUM + ZMAT(I,J)*ZMAT(I,J)
      IF (SUM.EQ.0.) GOTO 20
      SIGMA = SQRT (SUM)
      IF (TMJ.GE.0.) SIGMA = -SIGMA

      UJ = TMJ-SIGMA
      THAT(NP1,J) = UJ
      THAT(J,J) = SIGMA
      IF (J.EQ.NP1) GOTO 15

      JPI = J+1
      DO 12 K=JPI,NP1
      SUM = UJ*THAT(J,K)
      DO 13 I=1,N
13 SUM = SUM + ZMAT(I,J)*ZMAT(I,K)
      IF (SUM.EQ.0.) GOTO 10
      BETA = SIGMA*UJ
      IF (BETA.EQ.0.) GOTO 10
      SUB = SUM/BETA
      THAT(J,K) = THAT(J,K) + UJ*SUB
      DO 14 I=1,N
14 ZMAT(I,K) = ZMAT(I,K) + ZMAT(I,J)*SUB
12 CONTINUE
13 CONTINUE
10 CONTINUE
      RETURN

      WRITE (6,100)
20 CONTINUE
100 FORMAT (/1,X,'DIE MATRIX IST SINGULAER/')
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE REDUC (NMAX,M1,THATP,ROW,RHO)
C-----UP ZUR REKURSION DES M1=(M+1)-VEKTORS DER MITTELS
C ORTHOGONALER GIVENS-TRANSFORMATION
C DIE M1*M1-MATRIX THATP IST VOR DEM 1. AUFRUF ZU DEFINIEREN
C DAS ELEMENT THATP(M1,M1) GIBT DEN SUMMENFehler AN
C NMAX = MAXIMALE ZEILENZAH'L

DIMENSION THATP(NMAX,M1),ROW(M1)

C
  IF (RHO.EQ.1.) GO TO 4
  DO 3 I=1,M1
    DO 3 J=I,M1
      THATP(I,J) = RHO*THATP(I,J)
3
  4 DO 5 I=1,M1
    IF (ROW(I).EQ.0.) GO TO 5
    DE = SQRT (ROW(I)*ROW(I) + THATP(I,I)*THATP(I,I))
    C = THATP(I,I)/DE
    S = ROW(I)/DE
    DO 10 K=I,M1
      DE = C*ROW(K) - S*THATP(I,K)
      THATP(I,K) = S*ROW(K) + C*THATP(I,K)
      ROW(K) = DE
10
  5 CONTINUE
  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE REDC02 (NMAX,NP1,N,THAT,COEF,QMIN)
C-----UP ZUR KoeffizientenBESTIMMUNG AUS EINER NACH GIVENS-
C ODER HOUSEHOLDER TRANSFORMIERTEN DREIECKSMATRIX THAT
C QMIN = SUMME DER FEHLEQUADRATE
C N = ZAHL DER Koeffizienten
C NP1 = N+1
C NMAX = MAXIMALE ZEILENZAH'L

DIMENSION THAT(NMAX,NP1),COEF(N)

QMIN = THAT(NP1,NP1)*THAT(NP1,NP1)
TMA=ABS(THAT(N,N))
EPS = 1.E-6
COEF(N) = 0.
IF (TMA.GT.EPS) COEF(N) = -THAT(N,NP1)/THAT(N,N)
NM1 = N-1
DO 5 I=1,NM1
  I1 = N-I
  I2 = I1+1
  TMA = ABS(THAT(I1,I1))
  COEF(I1) = 0.
  IF (TMA.LE.EPS) GO TO 5
  COEF(I1) = -THAT(I1,NP1)/THAT(I1,I1)
  DO 8 J=I2,N
    COEF(I1) = COEF(I1) - COEF(J)*THAT(I1,J)/THAT(I1,I1)
8
5 CONTINUE
5 CONTINUE
6 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE REDUCO (NMAX,N1,THAT,ROW,COL)
C-----UP ZUR GIVEN-REDUKTION BEI GLEICHZEITIGER BESTIMMUNG DES
C-----SCHNITTFEHLERS FUER SAEBTLICHE DRUNGEN. KLEINER GLEICH N
C-----COL(N1) = SUMMENFEHLER DER DRUNGEN N
C      N1 = I+1

```

```

      DIMENSION THAT(NMAX,I1),COL(I1),COL(N1)

      DO 5      I=1,I1
      IF (ROW(I).EQ.0.)      GOTO 5
      DE = SQRT (ROW(I)*ROW(I) + THAT(I,I)*THAT(I,I))
      C = THAT(I,I)/DE
      S = ROW(I)/DE

      IF (I.EQ.1)      GOTO 11
      IM1 = I-1
      DE = SQRT (ROW(IM1)*ROW(IM1) + COL(IM1)*COL(IM1))
      CD = C.
      SD = S.
      IF (DEQ.0.)      GOTO 12
      CD = COL(IM1)/DE
      SD = ROW(IM1)/DE

12  CONTINUE
      COL(IM1) = SD*ROW(IM1) + CD*COL(IM1)

11  CONTINUE
      DO 10      K=1,N1
      DE = C*ROW(K) - S*THAT(I,K)
      THAT(I,K) = S*ROW(K) + C*THAT(I,K)
10  ROW(K) = DE
5    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE VERST (A,I PAR,NZ,PU,CS)
C-----UP MIT DER VERSTAEKUNG CS EINER DISKRETEN UEBERTRAGUNGSFUNKTION
C      PAR = ANZAHL DER PARAMETER

```

```

      DIMENSION A (PAR)

      SUM = 0.
      DO 10      I=1,PAR
10  SUM = SUM + A(I**7+I)
      CS = SUM**

      SUM = 0.
      DO 11      I=1,NZ
11  SUM = SUM + A(I)
      CS = CS/(1.+SUM**
      RETURN
      END

```

A.5: Zeitverläufe der geschätzten Prozeßparameter

Die angeschriebenen Symbole haben folgende Bedeutung:

Verfahren 1: Rekursive Version (REK) der IVA-Methode (IVA-REK)
Verfahren 2: Universell explizite Version (UVEX)
Verfahren 3: Indirekt-pseudorekursive Version (IPR)
Verfahren LS: Direkt-pseudorekursives Least-squares-Verfahren (LS-DPR)
Verfahren KOR: Korrelationsverfahren

IVA-Hilfsmodelle:

Modell o: Unverrauschtes Ausgangssignal als Hilfsvariable
Modell 1: Verzögerungs-Hilfsmodell
Modell 2: Diskretes Kalman-Filter
Modell 3: Vereinfachtes Kalman-Filter
Modell 4: Impulsantwortmodell
Modell F: Fest eingestelltes, zeitinvariantes Hilfsmodell

Prozeß M: Mehrgrößensystem mit 2 Eingangs- und 2 Ausgangs-
 größen gemäß /58/

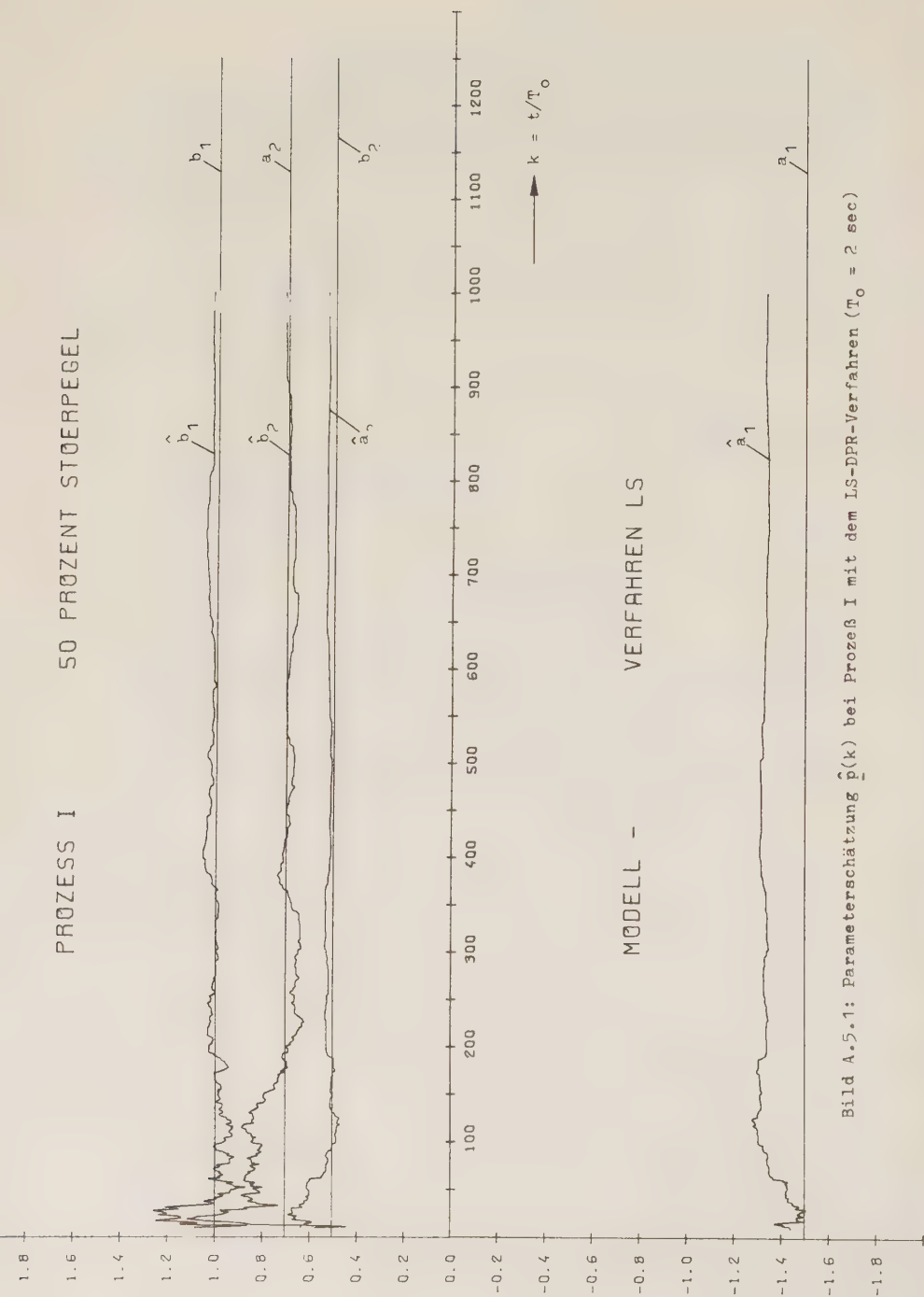
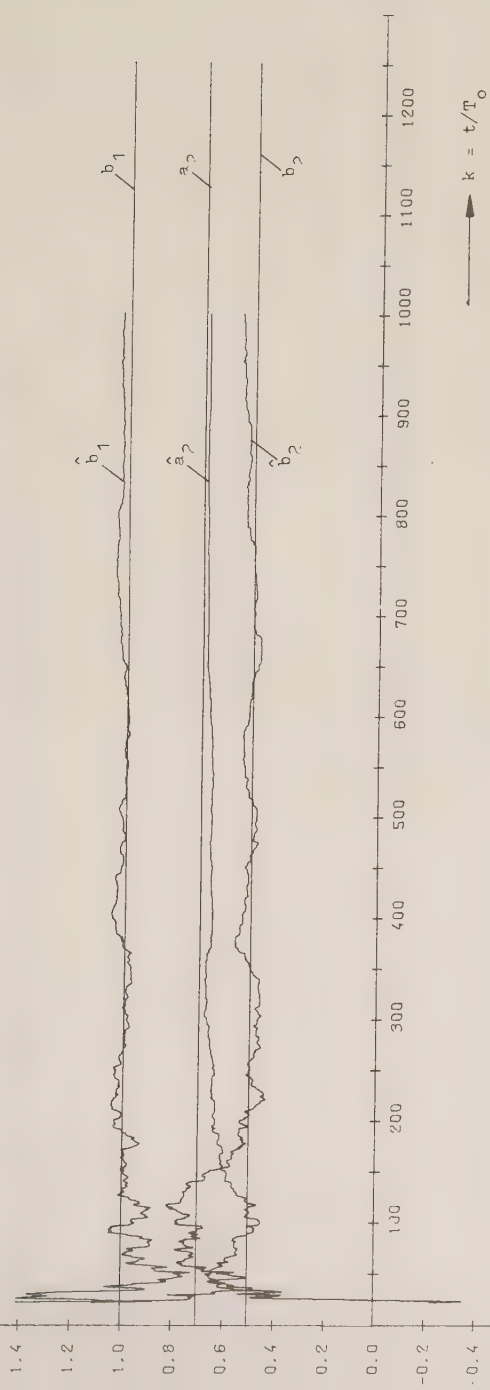


Bild A.5.1: Parameterschätzung $\hat{p}(k)$ bei Prozeß I mit dem LS-DPR-Verfahren ($T_0 = 2 \text{ sec}$)

PROZESS I 50 PROZENT STÖRPEGEL



MODELL - VERFAHREN KOR

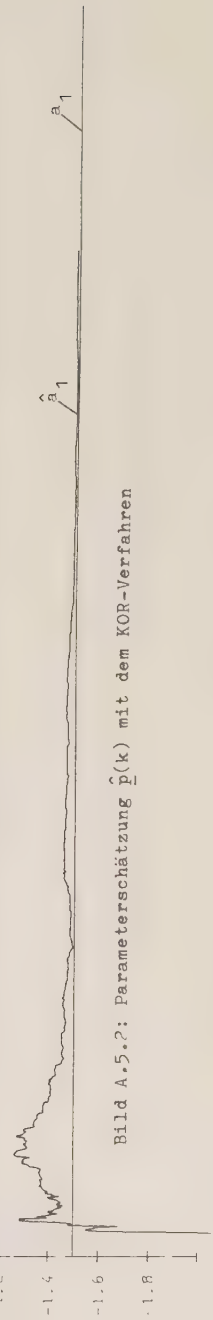
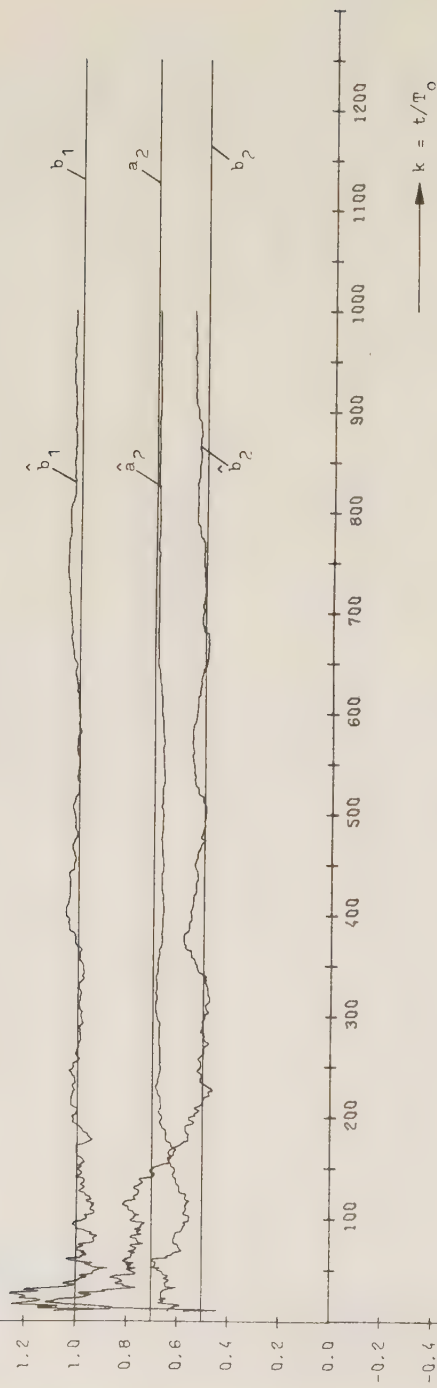


Bild A.5.2: Parameterschätzung $\hat{p}(k)$ mit dem KOR-Verfahren

PROZESS I 50 PROZENT STÖRPEGEL

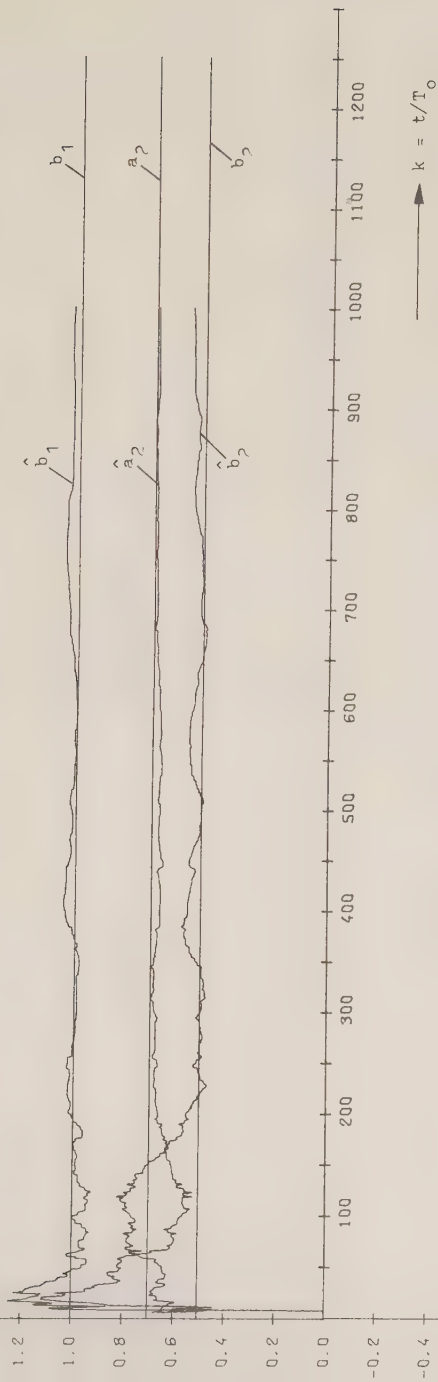


MODELL 1 VERFAHREN 2



Bild A.5.3: Parameterschätzung $\hat{p}(k)$ mit dem IVA-UVEX-Verfahren (VZ-Hilfsmodell)

PROZESS I 50 PROZENT STÖRPEGEL

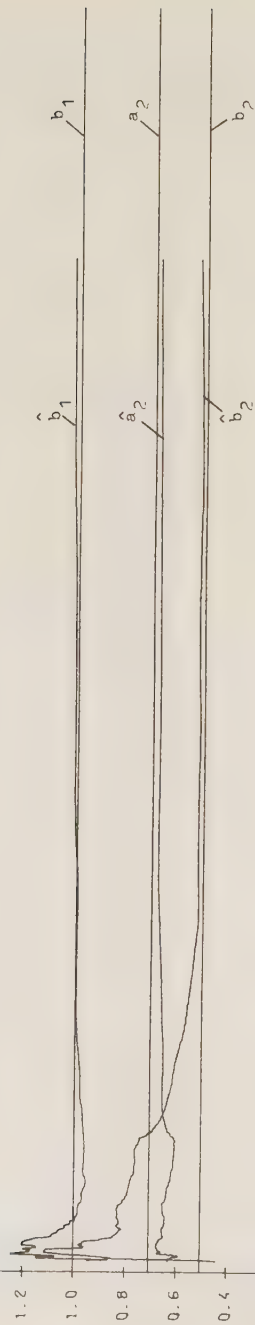


MODELL 1 VERFAHREN 3



Bild A.5.4: Parameterschätzung $\hat{p}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren ($\rho = 0.9$)

PROZESS I 50 PROZENT STÖRPEGEL



- A.26 -

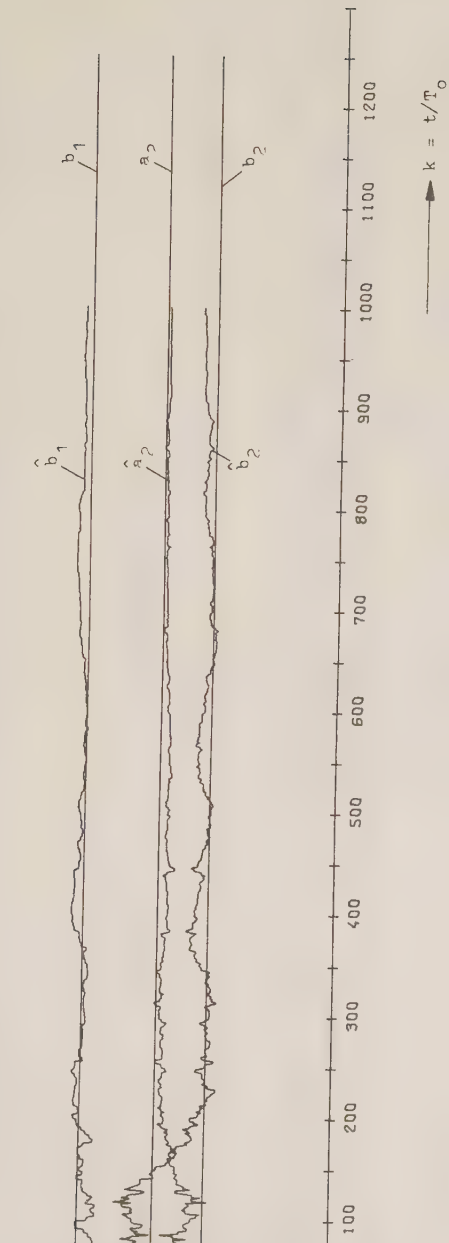
$k = t/T_0$

MODELL 1 VERFAHREN 3



Bild A.5.5: Schätzung $\hat{p}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren bei $\rho = 1$

PROZESS I 50 PROZENT STÖRPEGEL



MODELL 1 VERFAHREN 3

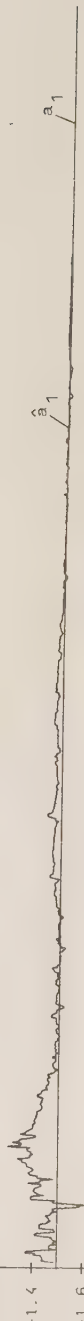
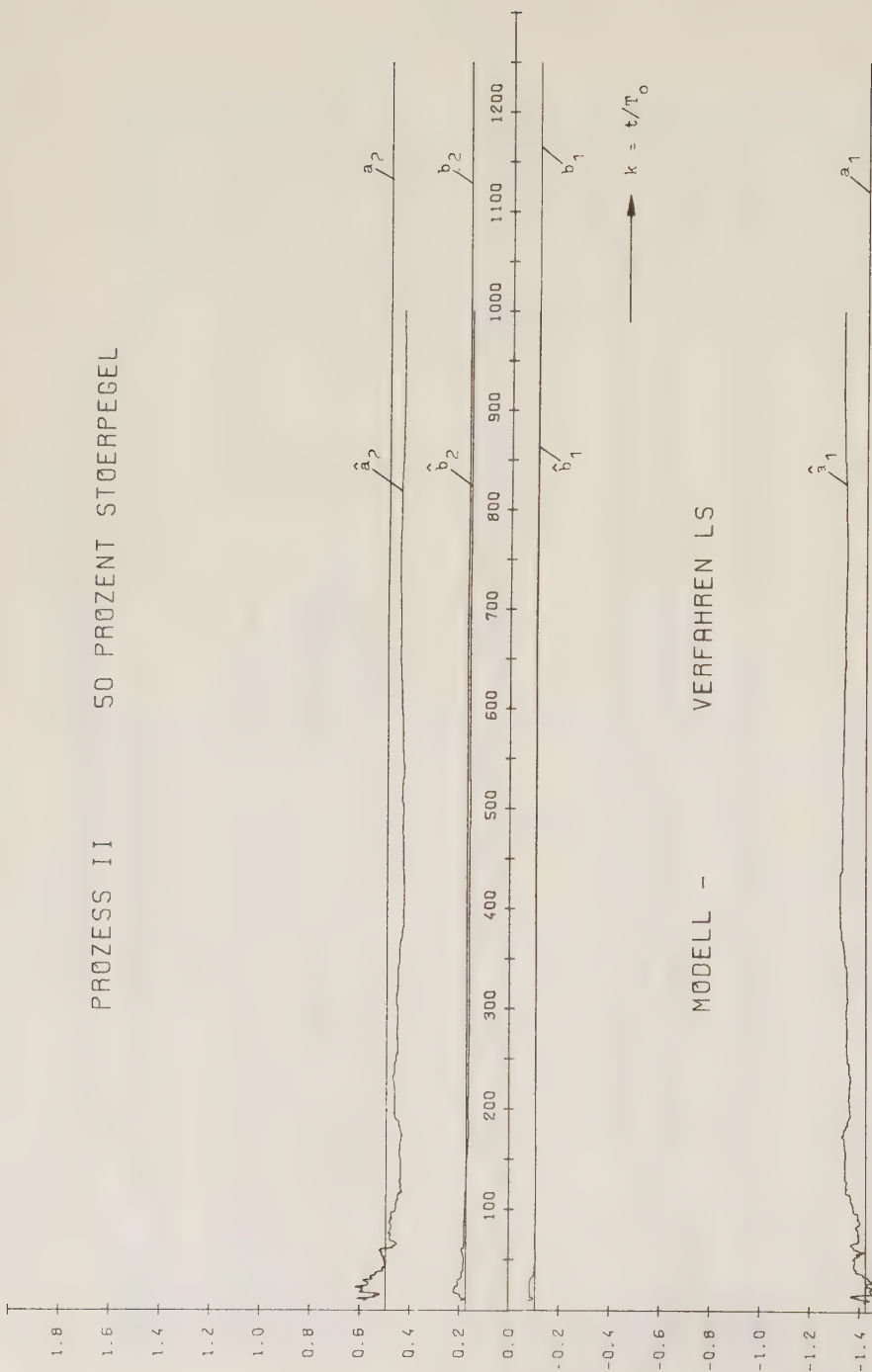


Bild A.5.6: Schätzung $\hat{f}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren bei $\rho = 1/q = 0.2$

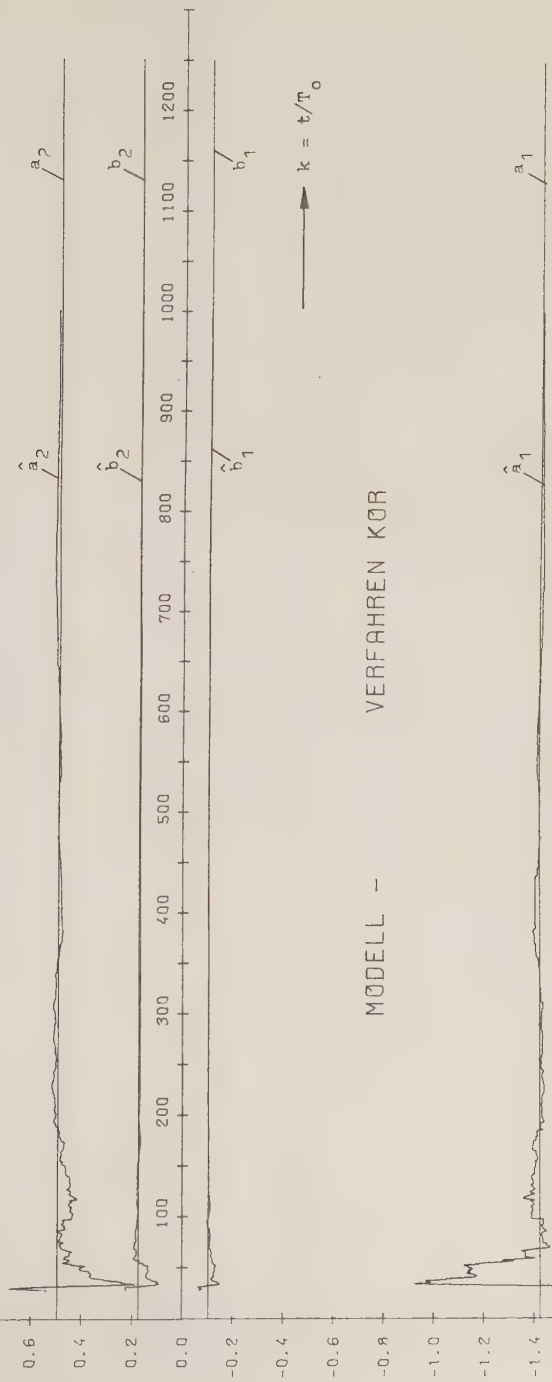
PROZESS II 50 PROZENT STÖRPEGEL



MODELL - VERFAHREN LS

Bild A.5.7: Schätzung $\hat{p}(k)$ bei Prozeß II mit dem LS-DPR-Verfahren ($T_0 = 2 \text{ sec}$)

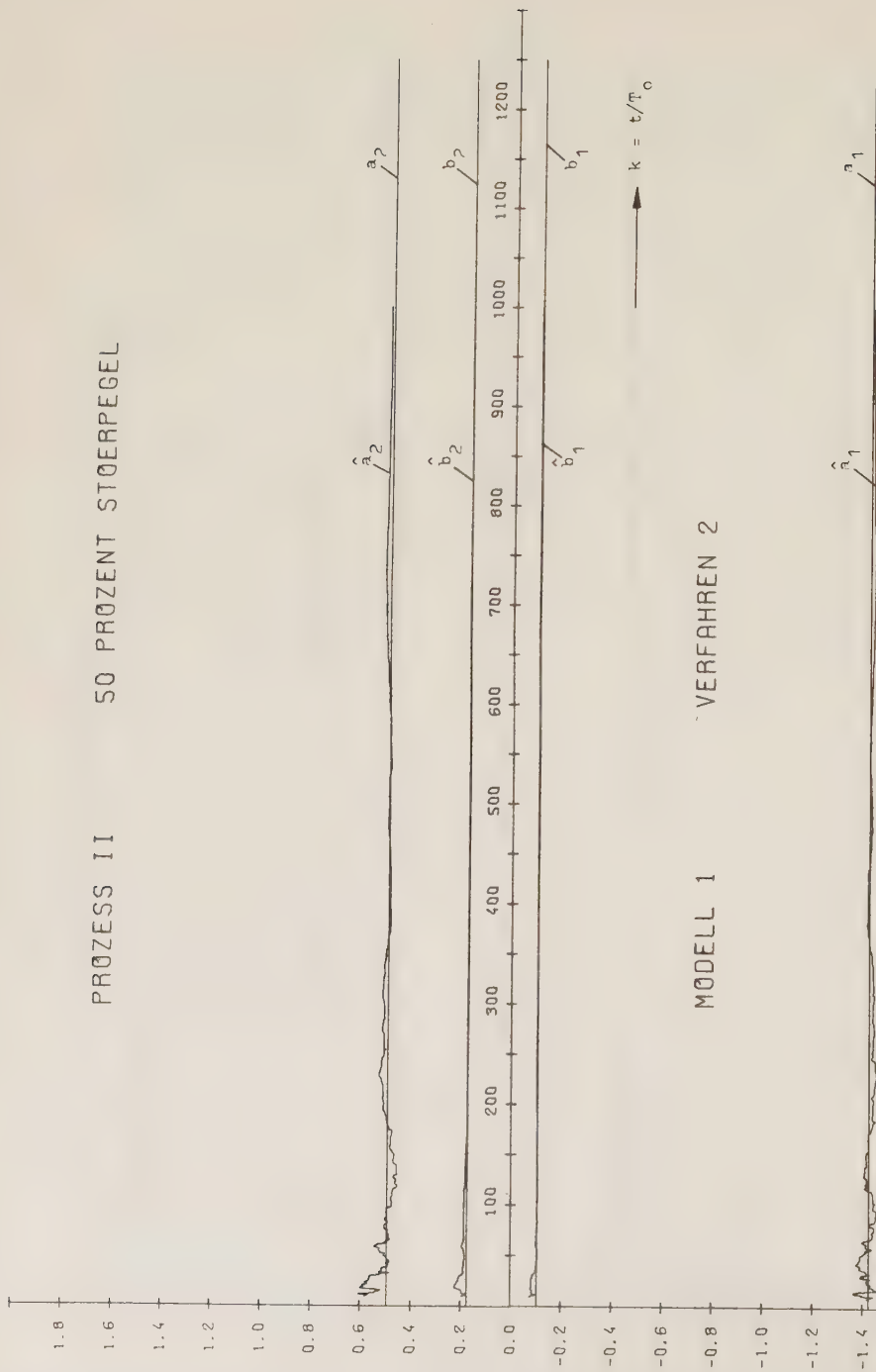
PROZESS II 50 PROZENT STÖRPEGEL



MODELL - VERFAHREN KOR

Bild A.5.8: Schätzung $\hat{p}(k)$ mit dem KOR-Verfahren

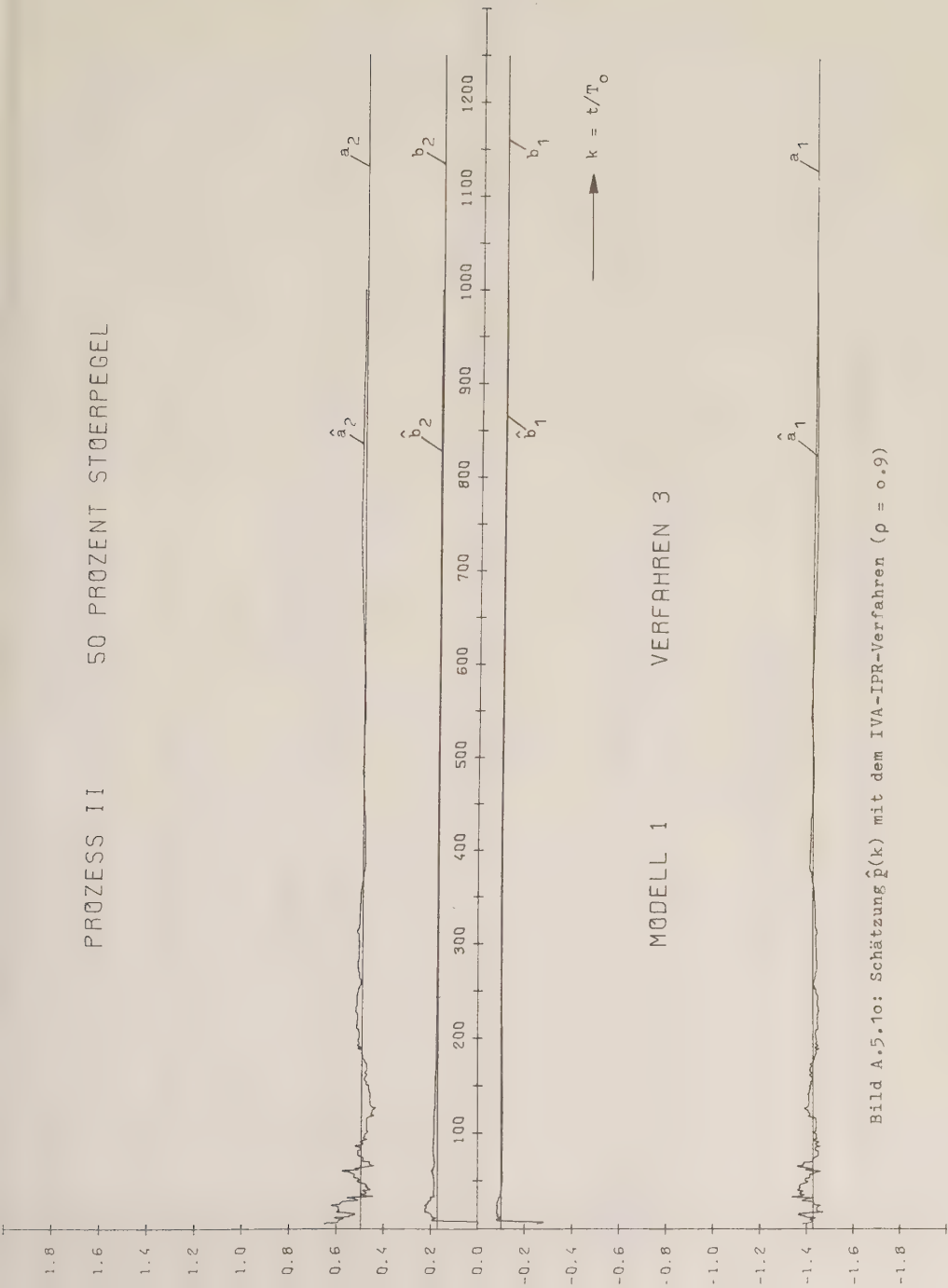
PROZESS II 50 PROZENT STÖRPEGEL



MODELL 1 VERFAHREN 2

Bild A.5.9: Schätzung $\hat{p}(k)$ mit dem IVA-UVEX-Verfahren (VZ-Hilfsmodell)

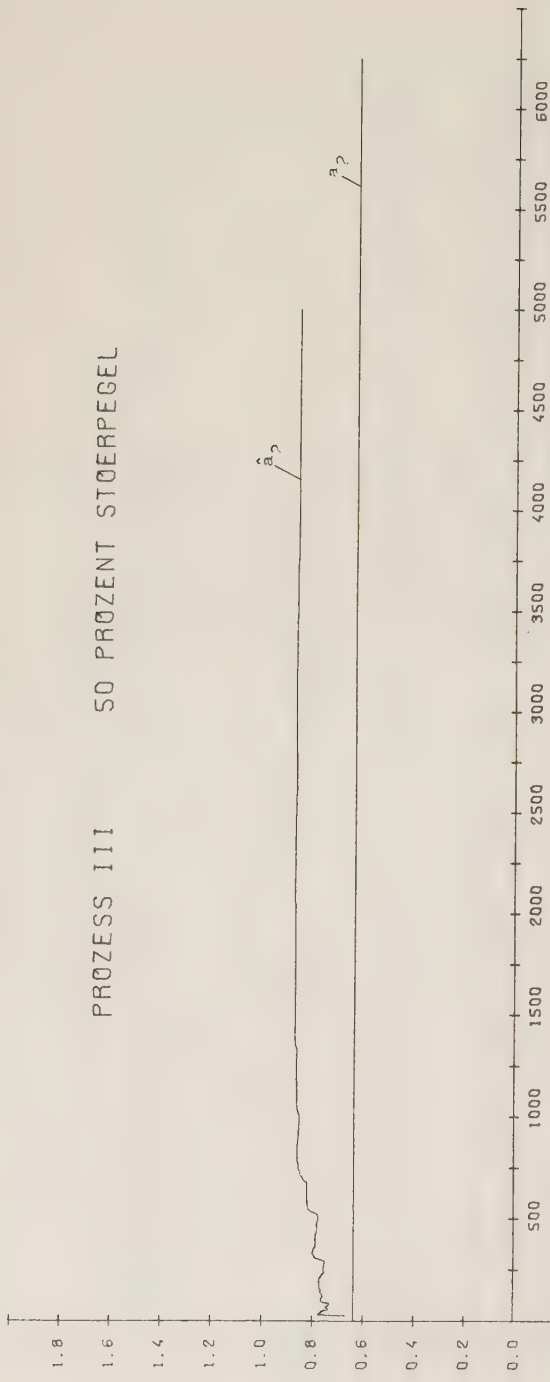
PROZESS II 50 PROZENT STÖRPEGEL



MODELL 1 VERFAHREN 3

Bild A.5.10: Schätzung $\hat{p}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren ($\rho = 0.9$)

PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL



- A.32 -

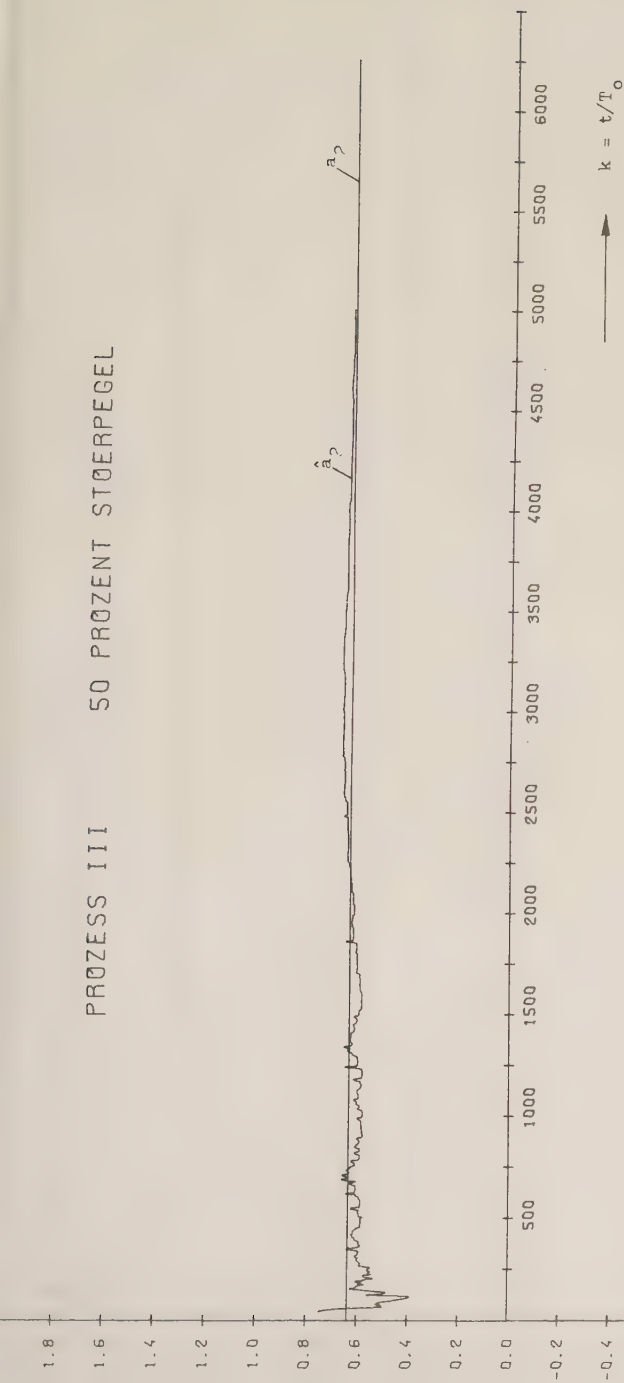
$k = t/T_0$

MODELL - VERFAHREN LS

Bild A.5.11: Schätzung $\hat{a}(k)$ von Prozeß III mit dem LS-DPR-Verfahren ($T_0 = 0.1 \text{ sec}$)



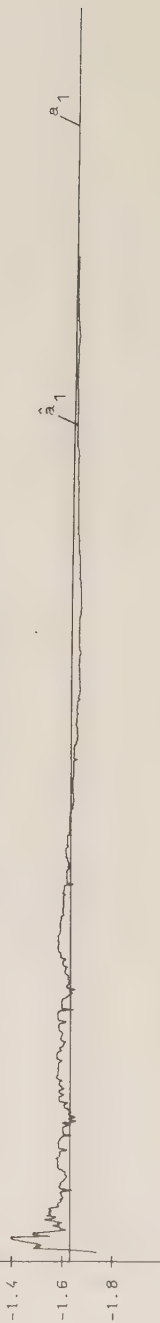
PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL



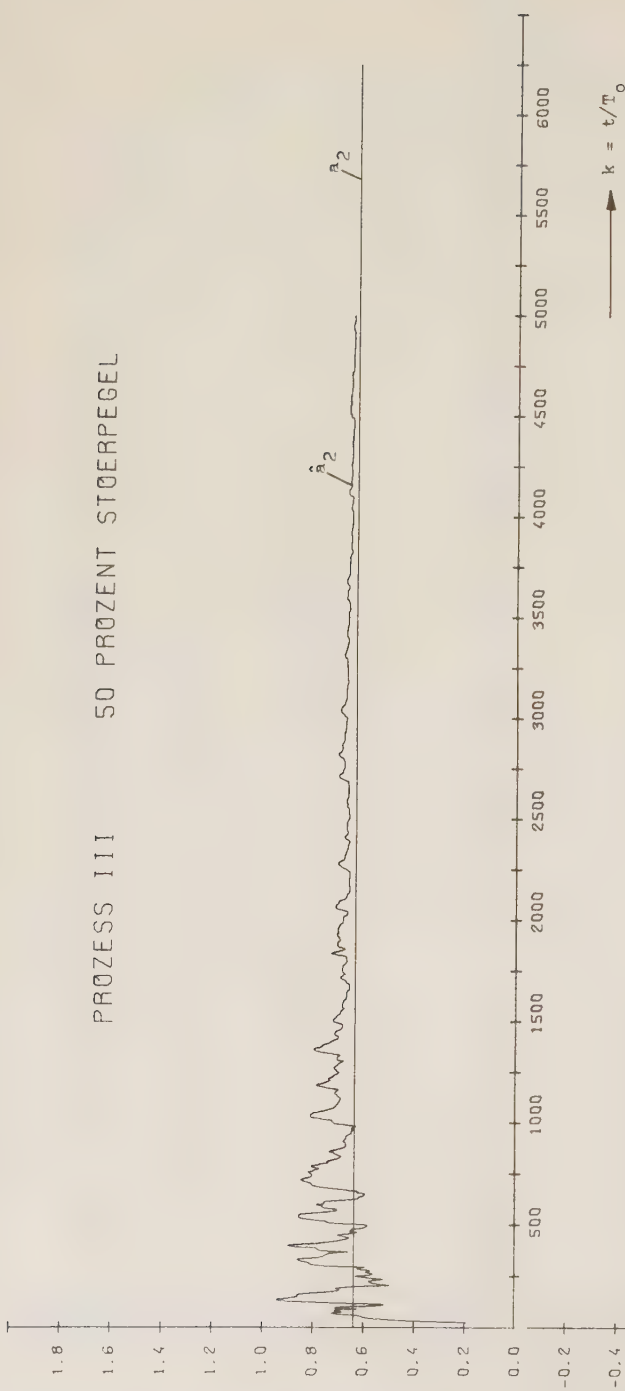
- A.33 -

MODELL - VERFAHREN KOR

Bild A.5.12: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem KOR-Verfahren



PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL



MODELL 1 VERFAHREN 3

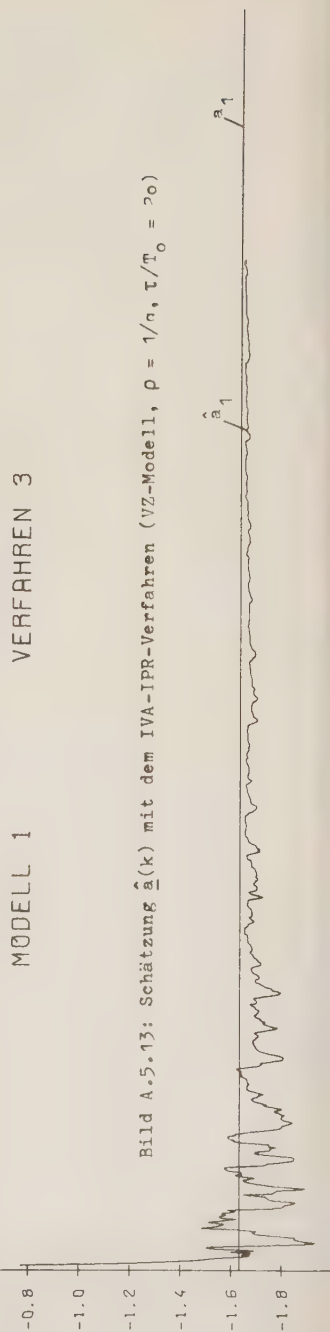
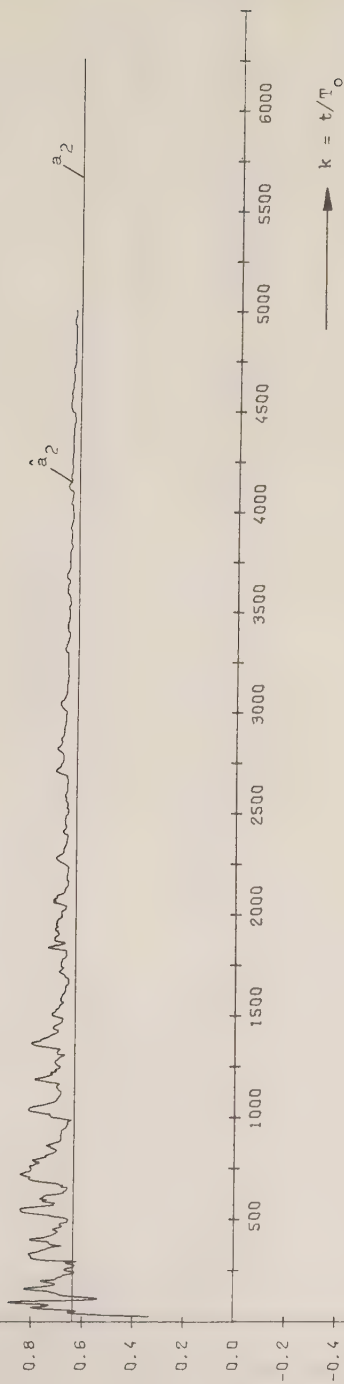


Bild A.5.13: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren (VZ-Modell, $\rho = 1/n, 1/T_0 = 20$)

PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL

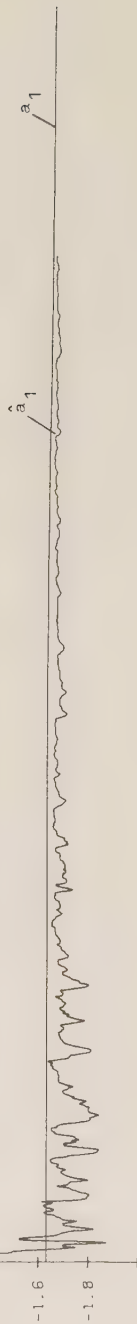


- A.35 -

$k = t/T_0$

MODELL 0 VERFAHREN 3

Bild A.5.14: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren bei $y_H = x$



PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL



$\hat{a}$

$\hat{a}_0$

A.36

$k = t/T_0$

MODELL 2 VERFAHREN 3

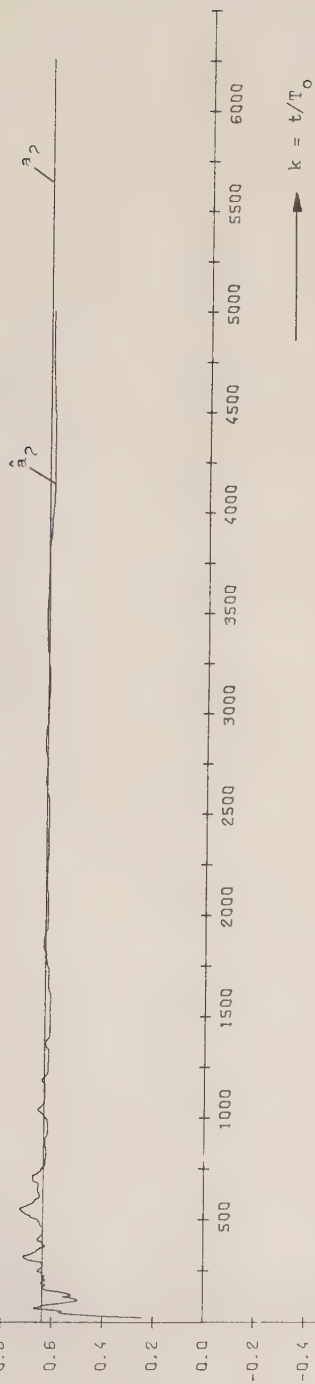
Bild A.5.15: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren (Kalman-Filter als Hilfsmodell)



$\hat{a}$

$\hat{a}_1$

PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL

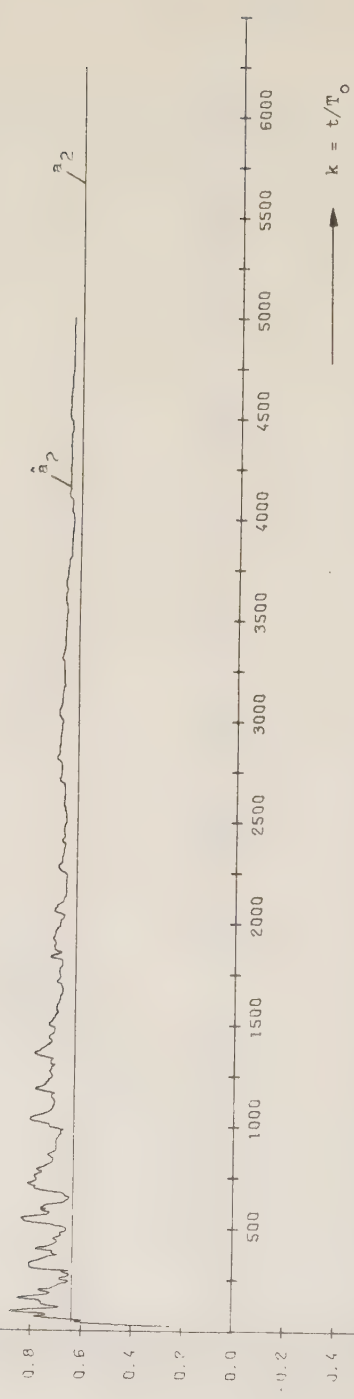


MODELL 4 VERFAHREN 3

Bild A.5.16: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren (Impulsantwortmodell)



PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL

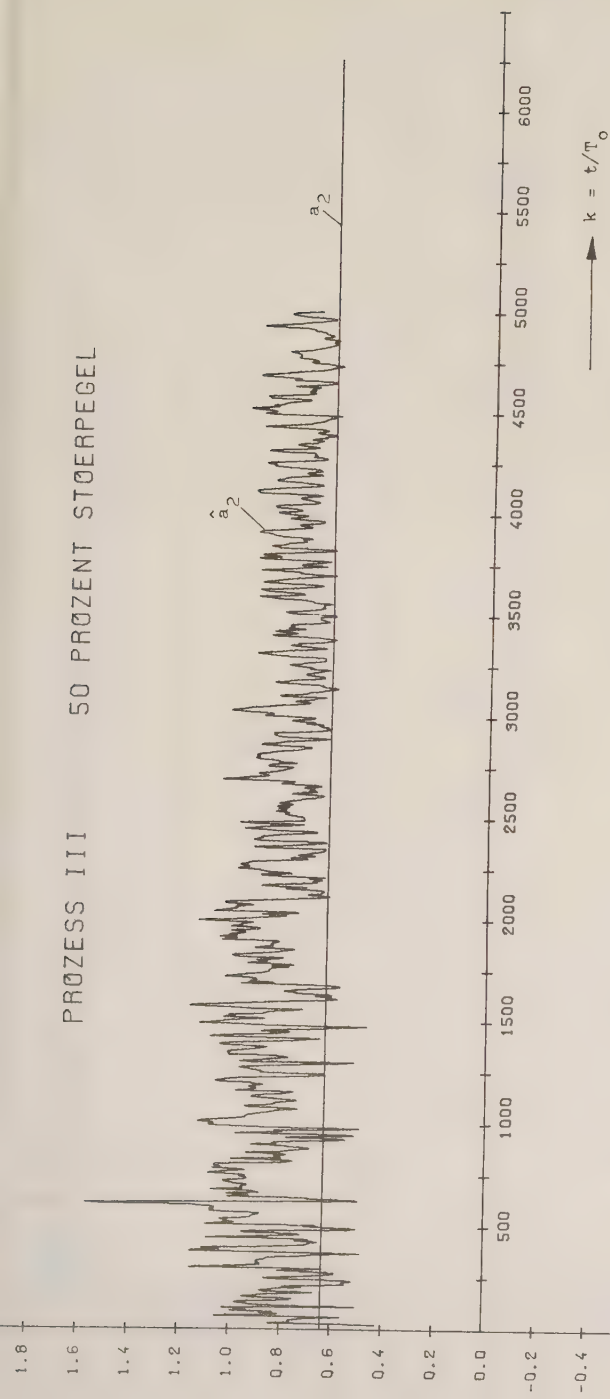


MODELL F VERFAHREN 3

Bild A.5.17: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren (festeingestelltes Hilfsmodell)



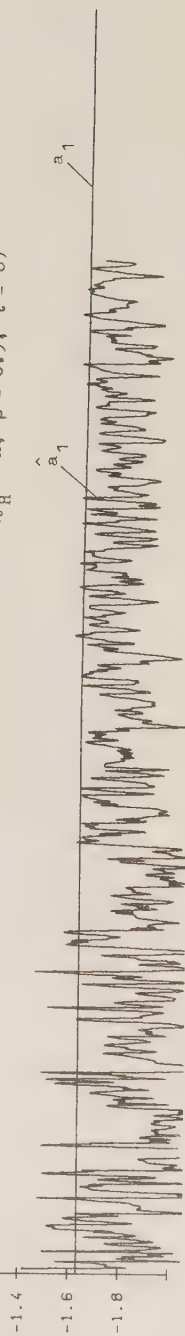
PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL



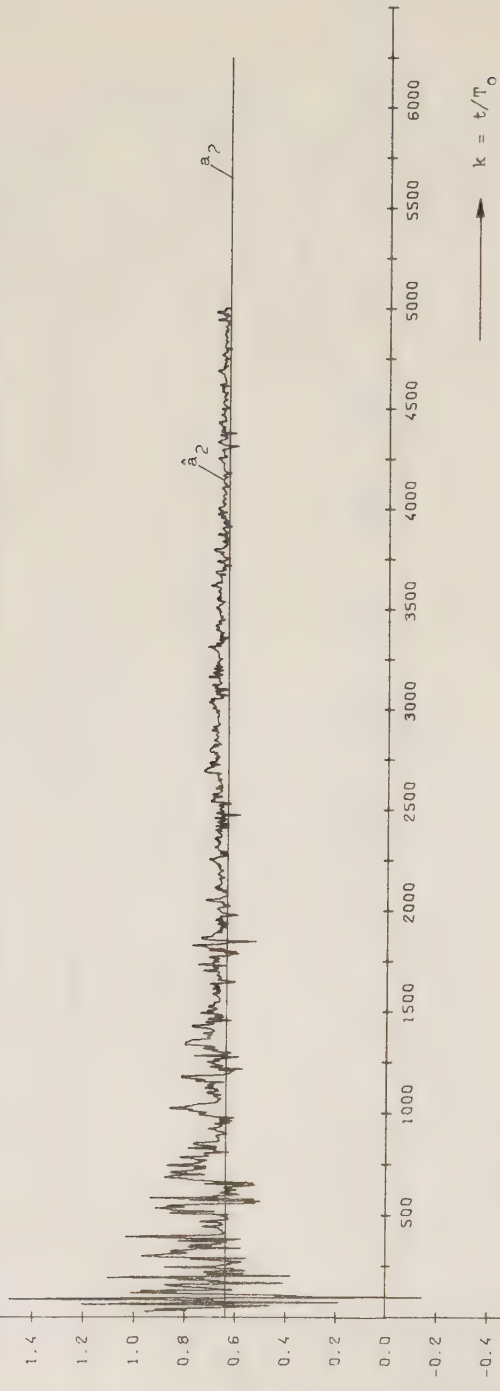
- A.39 -

MODELL 0 VERFAHREN 3

Bild A.5.18: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren ($y_H = x$, $\rho = 0.9$, $\tau = 0$)



PROZESS III 50 PROZENT STÖRPEGEL



A. 40

MODELL 0 VERFAHREN 3

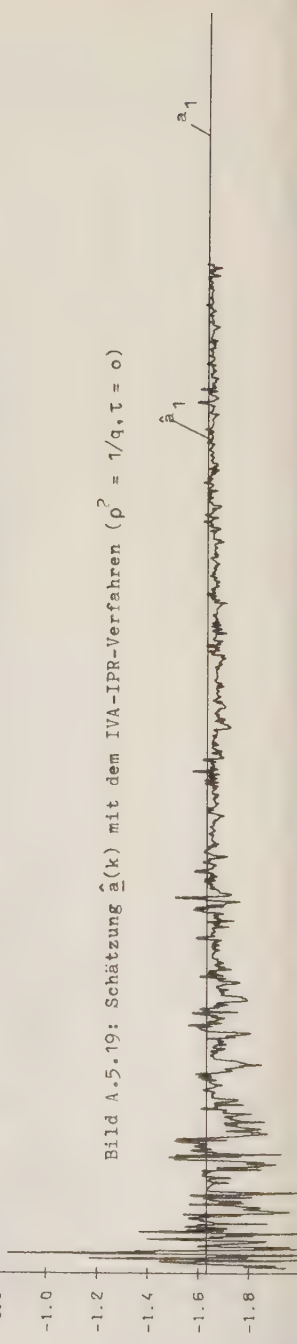


Bild A.5.19: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren ($\rho^2 = 1/q, \tau = 0$)

PROZESS I 50 PROZENT STÖRPEGEL



- A.41 -

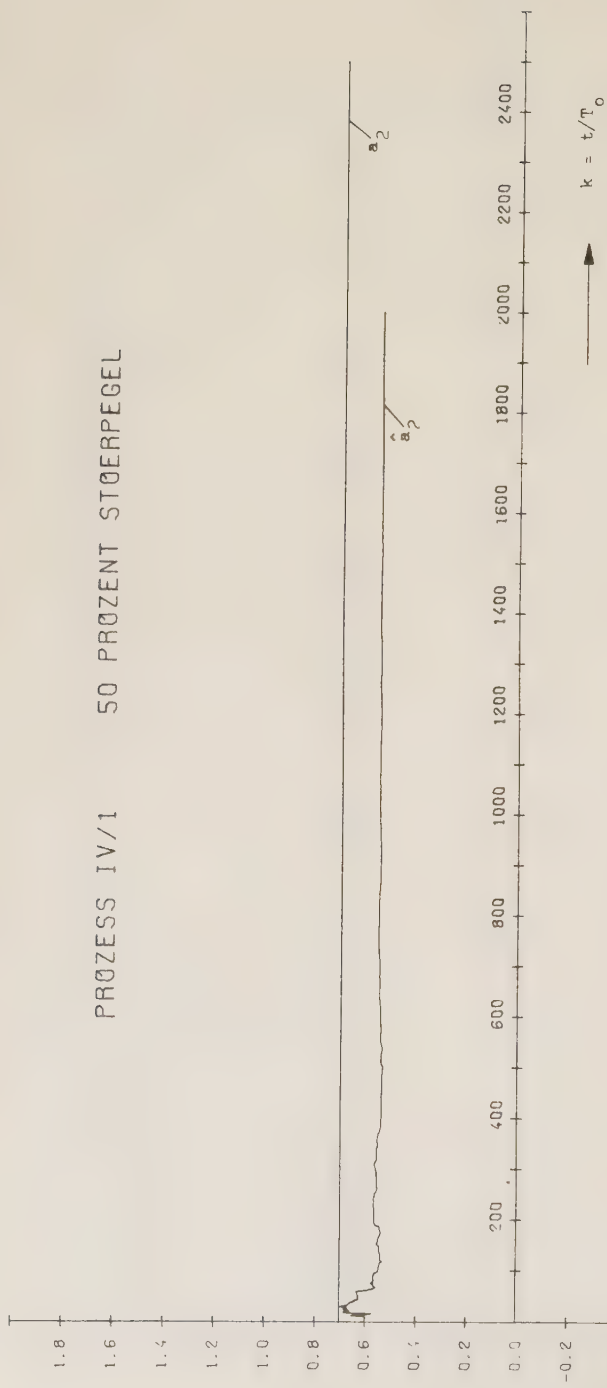
$k = t/T_0$

MODELL 1 VERFAHREN 3



Bild A.5.20: Schätzung $\hat{p}(k)$ im geschlossenen Kreis mit dem IVA-IPR-Verfahren (VZ-Modell, $p = 0.9$)

PROZESS IV/1 50 PROZENT STÖRPEGEL



- A.42 -

MODELL - VERFAHREN LS

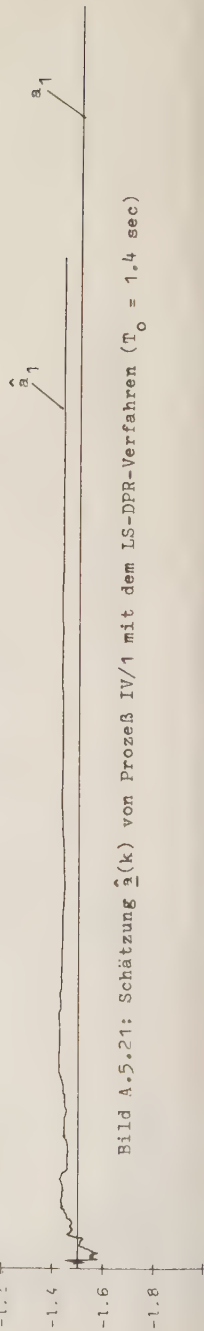
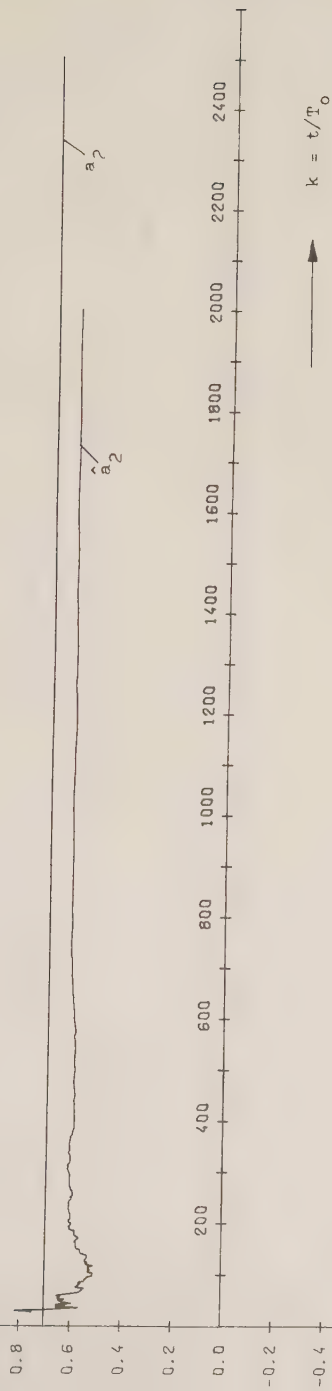


Bild A.5.21: Schätzung $\hat{a}(k)$ von Prozeß IV/1 mit dem LS-DPR-Verfahren ($T_0 = 1.4 \text{ sec}$)

PROZESS IV/1 50 PROZENT STÖRPEGEL



- A.43 -

MODELL - VERFAHREN KOR

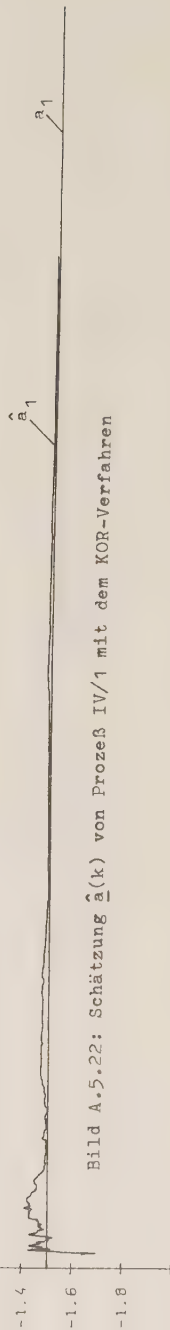
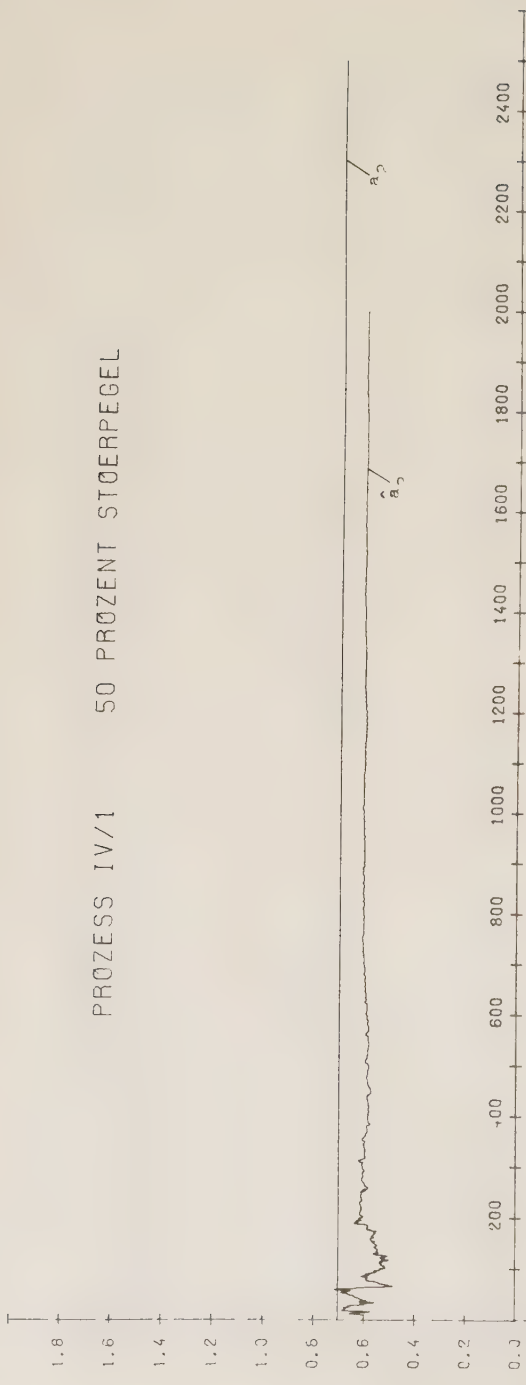


Bild A.5.22: Schätzung $\hat{a}(k)$ von Prozeß IV/1 mit dem KOR-Verfahren

PROZESS IV/1 50 PROZENT STÖRPEGEL



- A.44 -

$$k = t/T_0$$

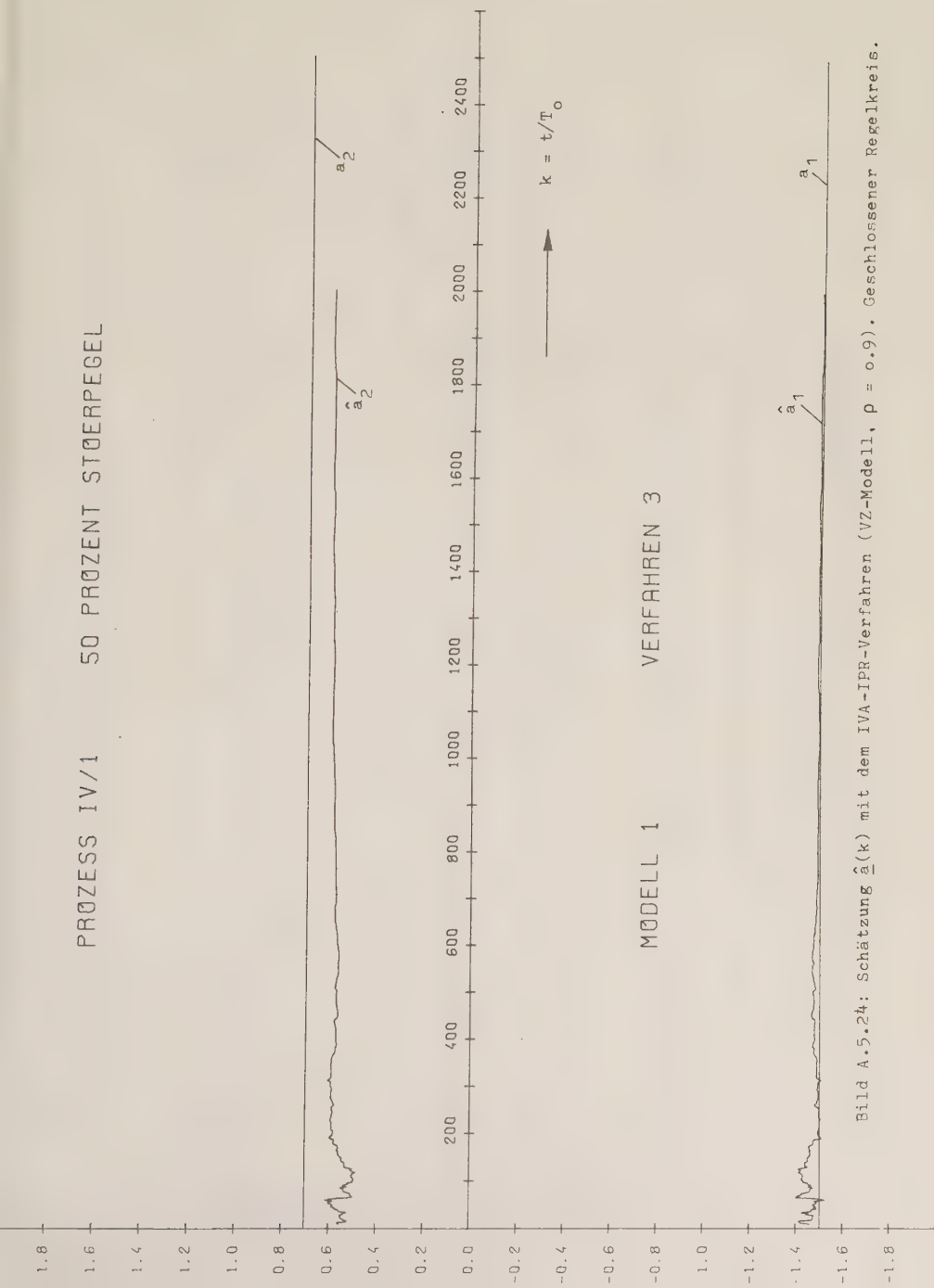
MODELL 1 VERFAHREN 3



Bild A.5.23: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren (VZ-Modell, $\rho = 0.9$)

PROZESS IV/1 50 PROZENT STÖRPEGEL

- A.45 -



MODELL 1 VERFAHREN 3

Bild A.5.24: Schätzung $\hat{a}(k)$ mit dem IVA-IPR-Verfahren (VZ-Modell, $\rho = 0.9$). Geschlossener Regelkreis.

PROZESS IV/2 50 PROZENT STÖRPEGEL

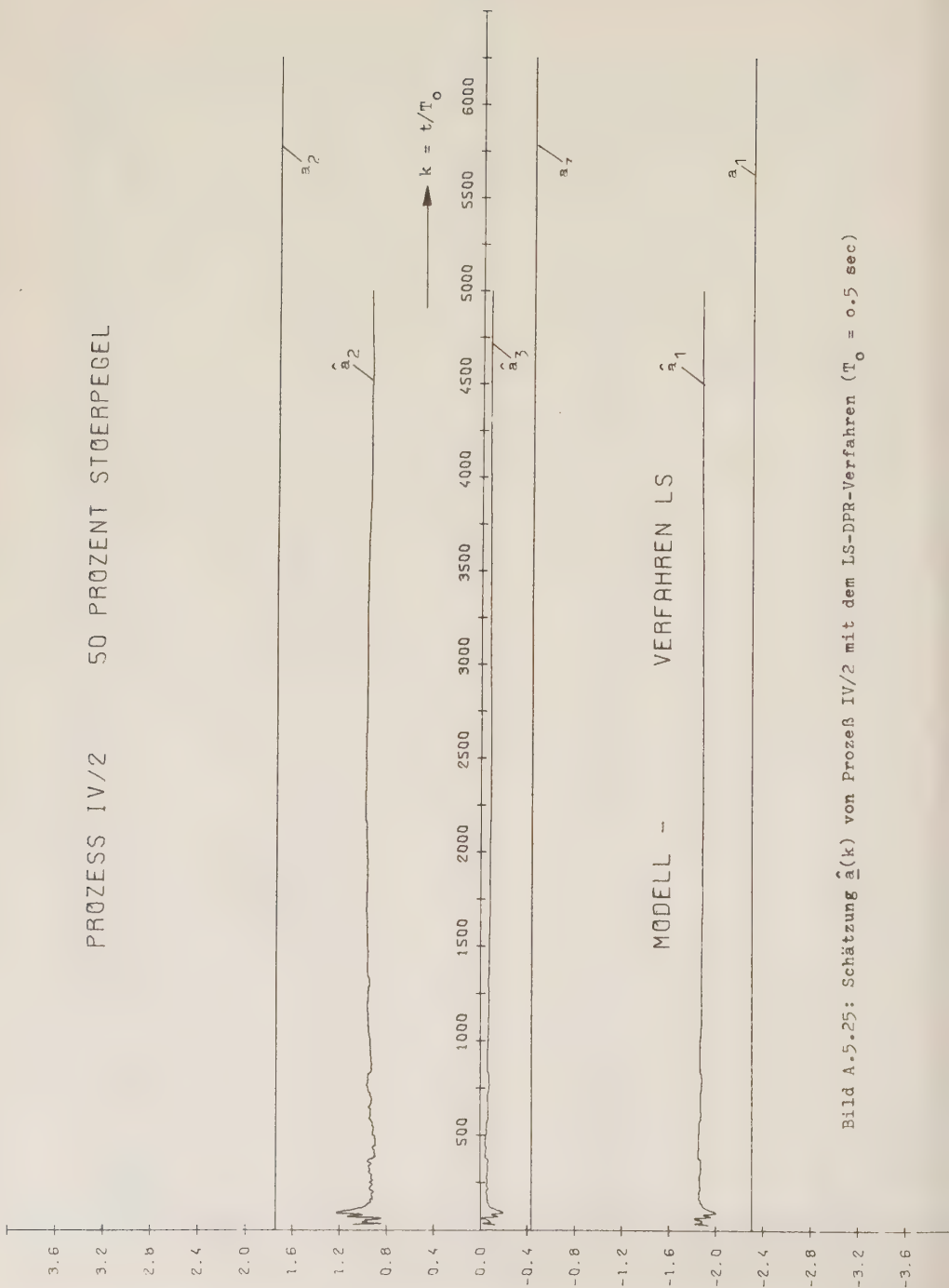
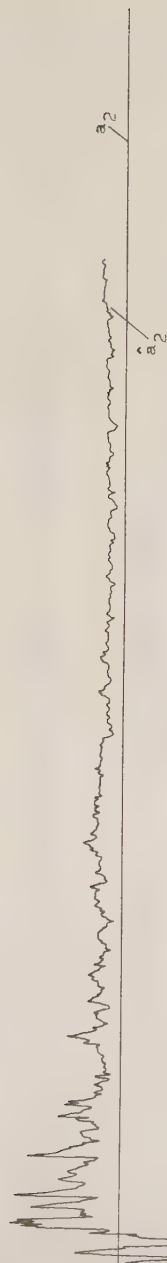


Bild A.5.25: Schätzung $\hat{a}(k)$ von Prozeß IV/2 mit dem LS-DPR-Verfahren ($T_0 = 0.5 \text{ sec}$)

PROZESS IV/2 50 PROZENT STÖRPEGEL



$k = t/T_0$

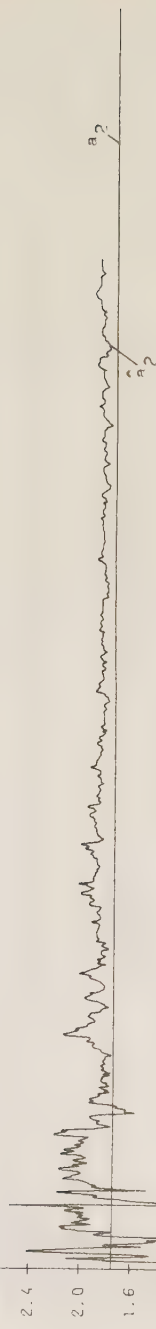


MODELL 1 VERFAHREN 3

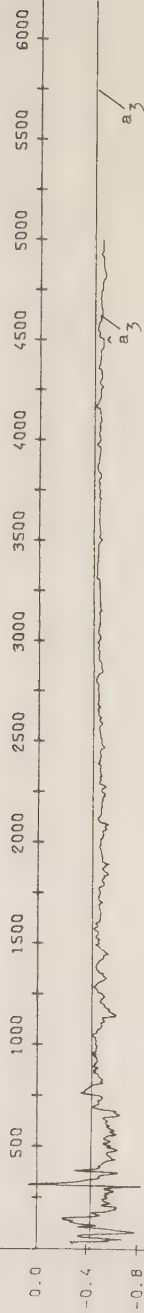


Bild A.5.26: Schätzung $\hat{a}(k)$ von Prozeß IV/2 mit dem IVA-IPR-Verfahren ($\rho^2 = 1/q, \tau/T_0 = 20$)

PROZESS IV/2 50 PROZENT STÖRPEGEL



$k = t/T_0$



MODELL 1 VERFAHREN 3



Bild A.5.27: Schätzung $\hat{a}_2(k)$ im geschlossenen Kreis mit dem IVA-IPR-Verfahren ($\rho = 1/\alpha$, $\tau/T_0 = 20$)

Prozeß M

$$\sigma = 0.1$$

Modell -

Verfahren LS

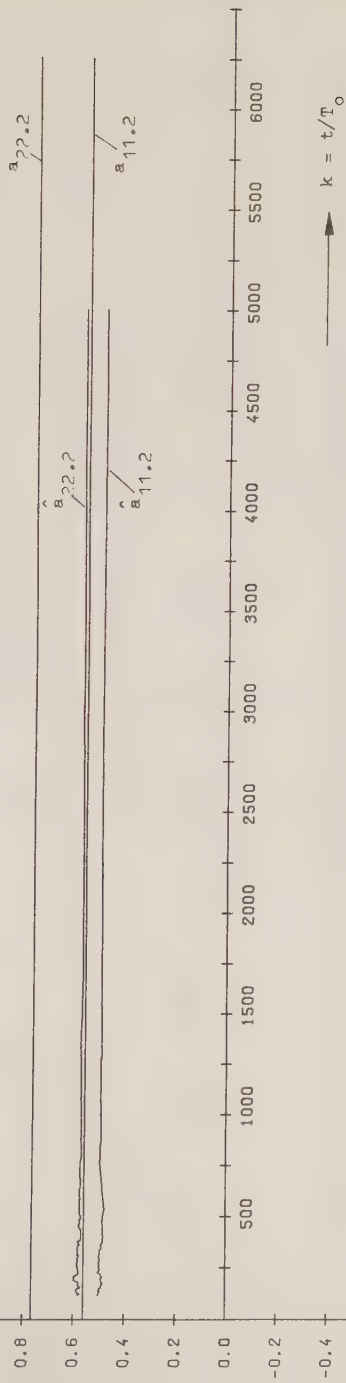
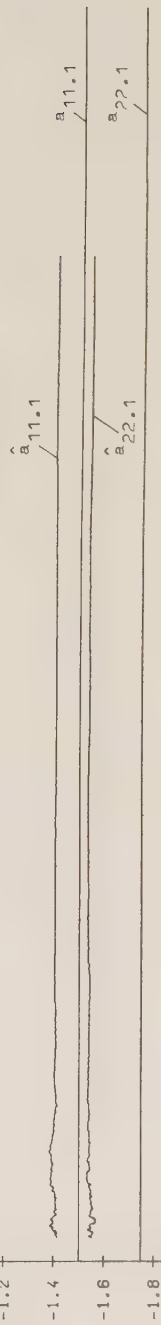


Bild A.5.28: Schätzung von $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ des Mehrgrößensystems mit dem LS-DPR-Verfahren



Prozeß M

$\sigma = 0.1$

Modell -

Verfahren LS

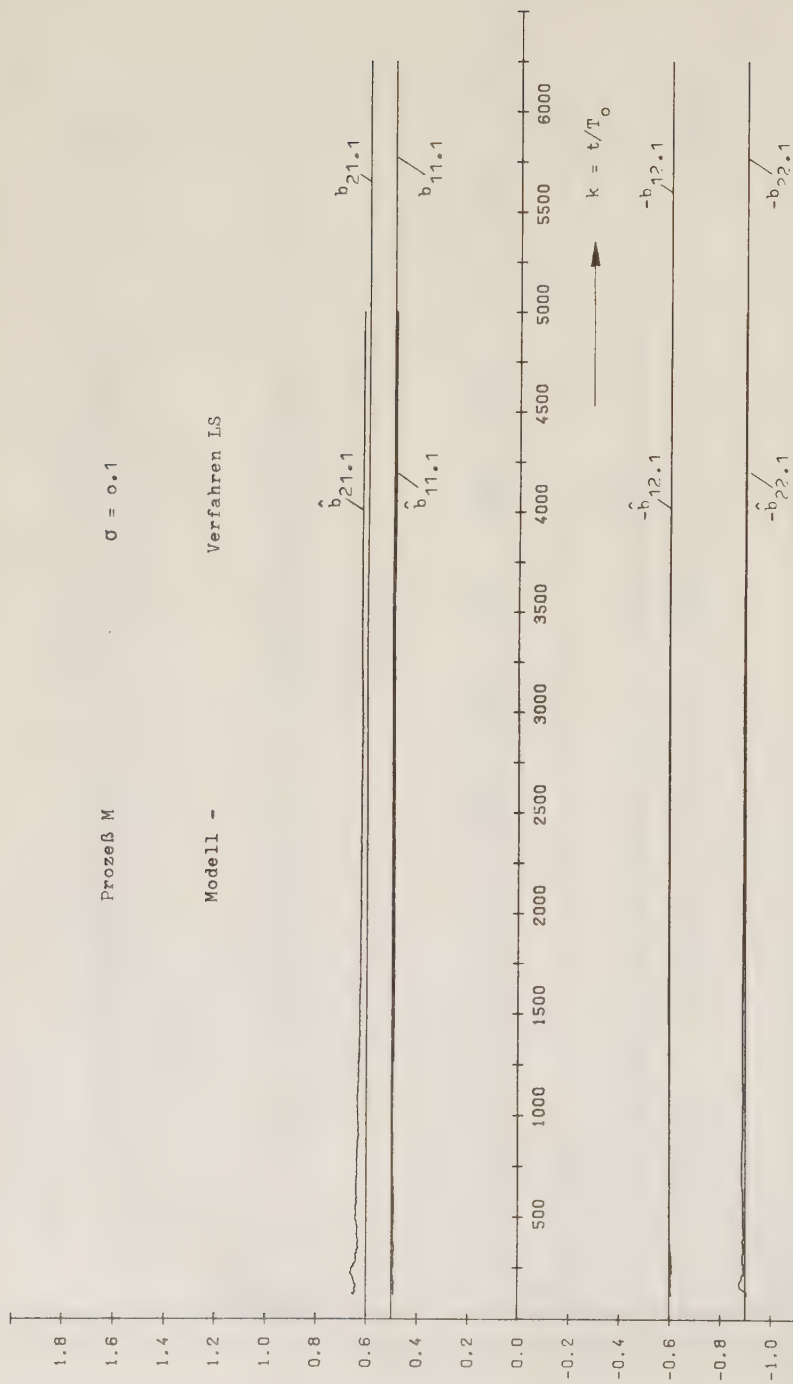


Bild A.5.29: Schätzung von $\underline{B}_1$ mit dem LS-DPR-Verfahren

Prozeß M

$\sigma = 0.1$

Modell -

Verfahren LS

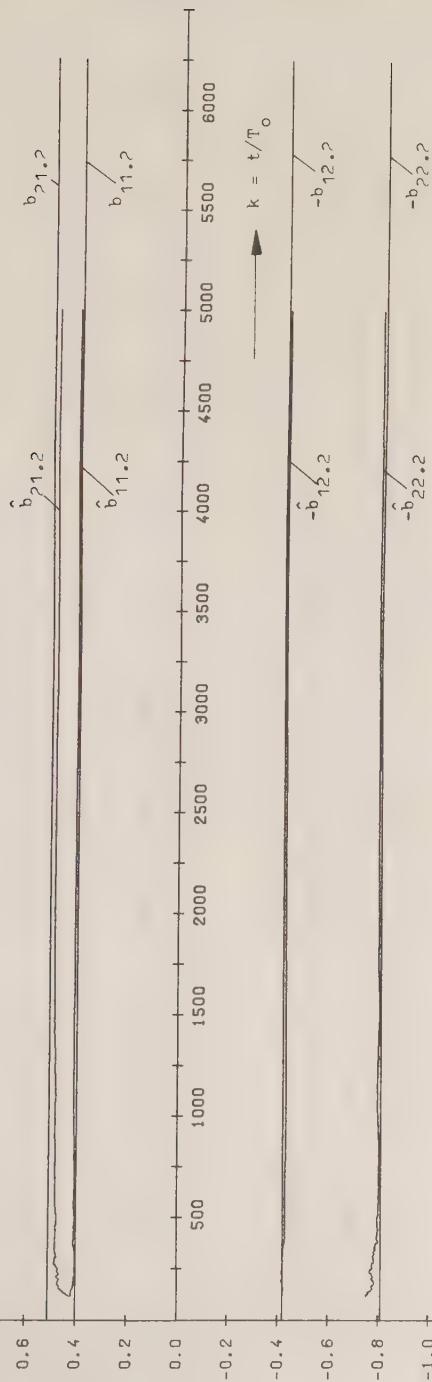


Bild A.5.30: Schätzung von $\underline{b}_2$ mit dem LS-DPR-Verfahren

Prozeß M

$$\sigma = 0.1$$

Modell 1

Verfahren 3

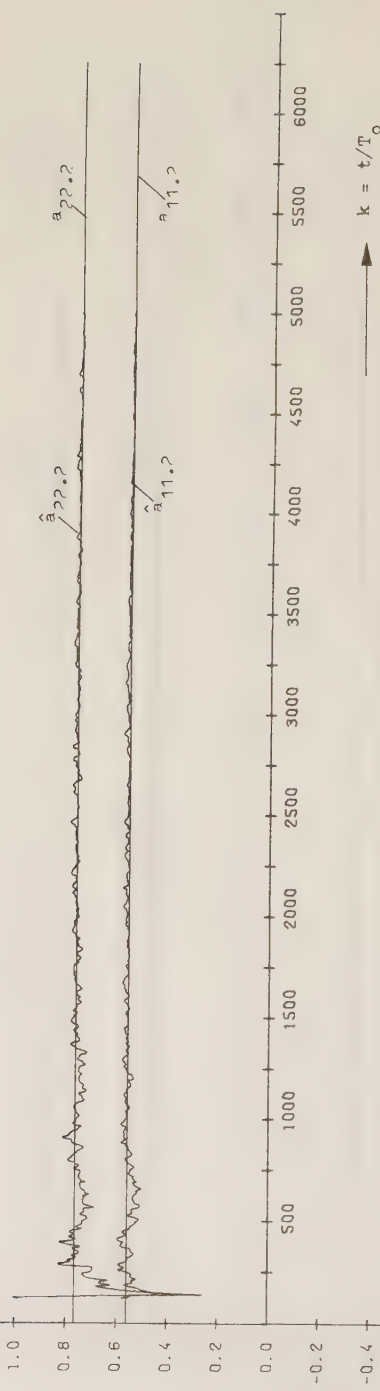


Bild A.5.31: Schätzung von $\hat{A}_1$ und $\hat{A}_2$ mit dem IVA-IPR-Verfahren ($\rho^2 = 1/q, \tau/T_0 = 2\sigma$)



Prozeß M $\sigma = 0.1$

Modell 1 Verfahren 3

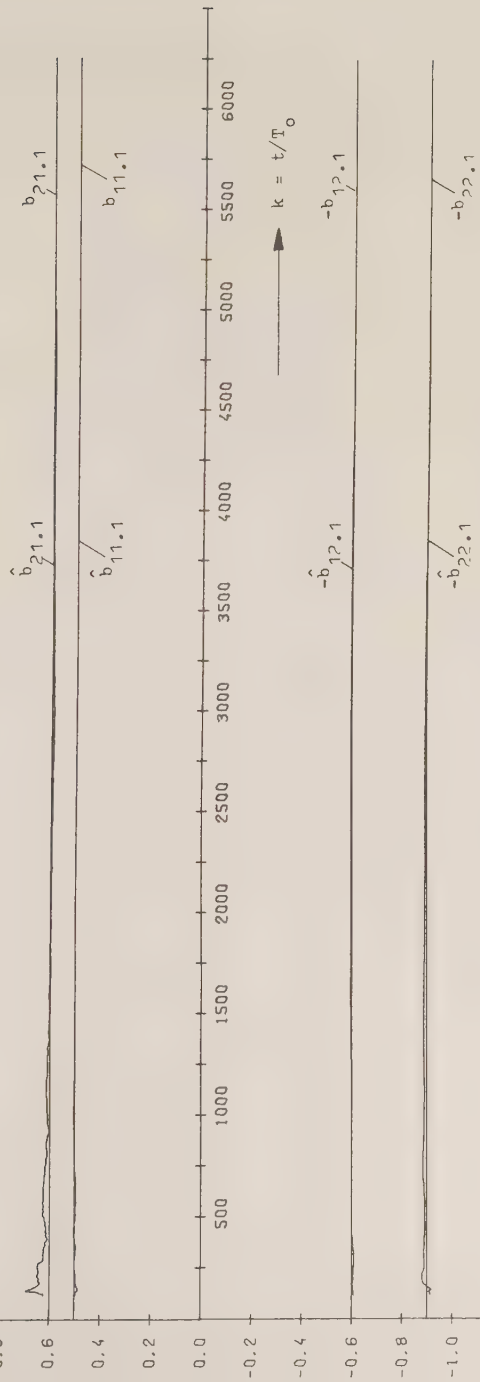


Bild A.5.32: Schätzung von $\underline{b}_1$ mit dem IVA-IPR-Verfahren

Prozeß M

$\sigma = 0.1$

Modell 1

Verfahren 3

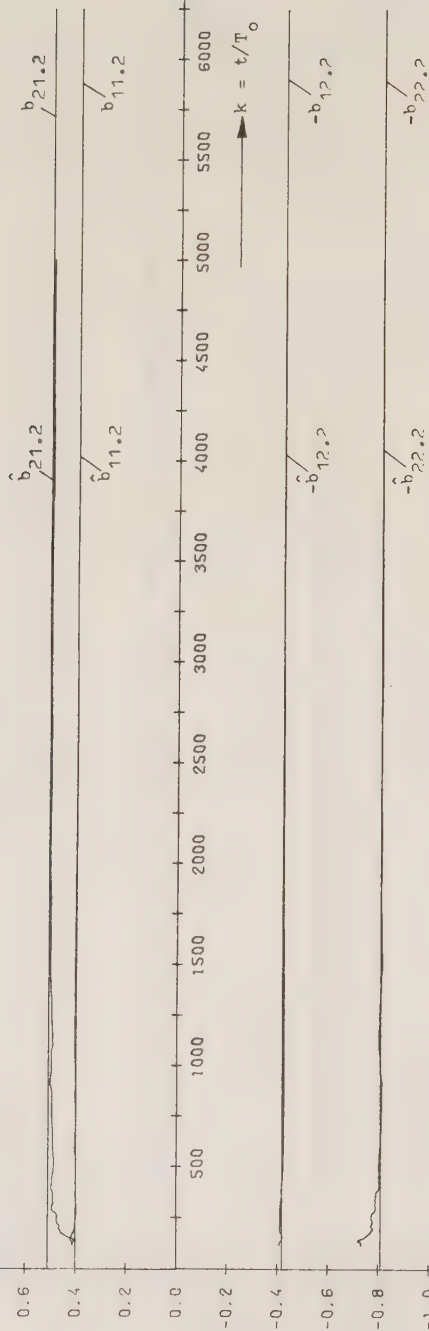


Bild A.5.33: Schätzung von $\underline{b}_2$ mit dem IVA-IPR-Verfahren

A.6: Liste der wichtigsten Formelzeichen

<u>Zeichen</u>	<u>Bedeutung</u>
$u(t)$	Prozeßeingangssignal
$x(t)$	störungsfreier Systemausgang
$r(t)$	Störsignal
$y(t)$	Prozeßausgangssignal
$y_M(t)$	Modellausgangssignal
$e(t), \tilde{e}(t)$	Fehlersignale
$w(t), e^*(t)$	weißes Rauschsignal
$y_H(t)$	Hilfsvariable
T_0	Abtastperiode
k	Laufvariable
z	Verschiebeoperator
$G(\cdot), F(\cdot)$	Übertragungsfunktionen
s	Laplace-Operator
$A(\cdot), B(\cdot)$	Polynom-Operatoren
a_i, b_i	Kennwerte
$\underline{p}$	Parametervektor
$\hat{\underline{p}}$	Schätzung des Parametervektors
$\tilde{\underline{p}}$	Schätzfehlervektor
n	Systemordnung
N	Größe des Meßintervalles
q	Anzahl der Kennwerte
$\underline{m}(k)$	Meßwertvektor
$\underline{M}$	Meßwertmatrix
$\underline{P}$	Gewichtsmatrix
$\underline{P}^*$	Kovarianzmatrix
σ	Standardabweichung

Zeichen	Bedeutung
$\underline{K}$	Verstärkungsvektor
$\underline{I}_n$	Einheitsmatrix n-ter Ordnung
$\underline{T}$	orthogonale Transformationsmatrix
$\ \cdot\ $	Norm
Q	Summe der Fehlerquadrate
$\underline{Z}(\cdot)$	zusammengefaßte Matrix
$\underline{E}_b$	Biasvektor
$E\{\cdot\}$	mathematischer Erwartungswert
$\underline{w}(k)$	Hilfswertvektor
$\underline{W}$	Hilfswertmatrix
$s(\cdot)$	singulärer Wert
$\lambda(\cdot)$	Eigenwert
$\text{lub}(\cdot)$	Grenznorm
$\text{cond}(\cdot)$	Konditionszahl
$\text{det}(\cdot)$	Determinante
K_M, K_S	spezielle Konditionszahlen
$\underline{H}$	Transformationsmatrix
ρ	Gewichtsfaktor
$V(\cdot)$	Verlustfunktion
$DV(\cdot)$	Determinantenverhältnis
$(\cdot)^*$	orthogonal transformierte Matrix
$(\cdot)'$	H-transformierte Matrix

Lebenslauf

22.1.1945	Geboren in Oberlengsfeld, Kreis Hersfeld, als Sohn des Kaufmannes Wilhelm Nicolai und seiner Ehefrau Luise, geb. Bock
1951 - 1955	Besuch der Volksschule in Schenklengsfeld
1955 - 1964	Besuch des Realgymnasiums in Bad Hersfeld
26.2.1964	Ablegung der Reifeprüfung am dortigen mathe- matisch-naturwissenschaftlichen Zweig
1.4. - 30.9.1964	Grundpraktikum bei der Firma Benno Schilde Maschinenbau AG, Bad Hersfeld
26.11.1964	Immatrikulation an der Technischen Hochschule Darmstadt, Fakultät für Elektrotechnik
16.12.1966	Ablegung des Vordiploms. Wahl der Fachrichtung Regelungstechnik
März 1967, Oktober 1967	Praktikum bei der Firma Zuse KG, Datenver- arbeitungsanlagen, Bad Hersfeld
14.11.1969	Abschluß des Studiums mit dem Erwerb des Diploms an der Fakultät für Elektrotechnik der Technischen Hochschule Darmstadt
1.1.1970	Eintritt in das "Institut für Automation" der AEG-Telefunken, Frankfurt/M, in dem ich als Entwicklungsingenieur gegenwärtig tätig bin.





